

Cour de électricité 1

Cour de électricité 1

Rappel mathématique

plan

1. Calcule vectoriel
2. Systèmes de coordonnées
3. Intégrale
4. L'angle solide

I. Calcul vectoriel

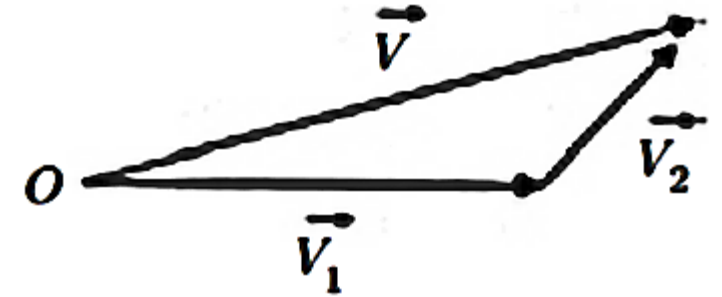
1. Somme de deux vecteurs

$$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2$$

$$\vec{V}_1 = X_1 \vec{e}_x + Y_1 \vec{e}_y + Z_1 \vec{e}_z$$

$$\vec{V}_2 = X_2 \vec{e}_x + Y_2 \vec{e}_y + Z_2 \vec{e}_z$$

$$\vec{V} = (X_1 + X_2) \vec{e}_x + (Y_1 + Y_2) \vec{e}_y + (Z_1 + Z_2) \vec{e}_z$$



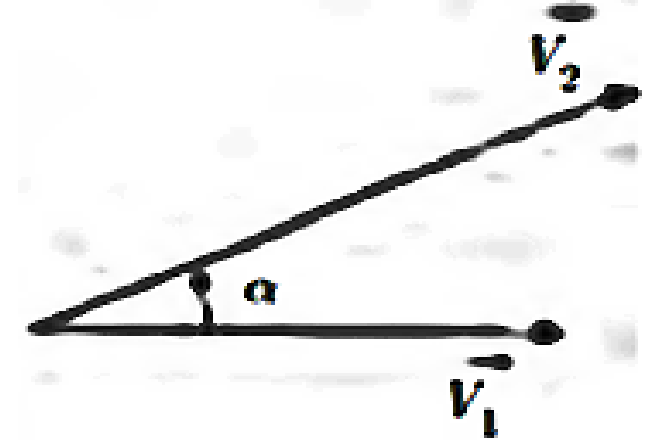
2. Produit scalaire

$$S = \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2$$

$$S = V_1 V_2 \cos \alpha$$

S est un scalaire Par définition

où l'angle α est défini par $\alpha = (\vec{V}_1, \vec{V}_2)$.



- Le produit scalaire de deux vecteurs perpendiculaires est nul.
- Pour les vecteurs unitaires $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$ on a :

$$\vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = \vec{e}_y \cdot \vec{e}_z = \vec{e}_z \cdot \vec{e}_x = 0$$

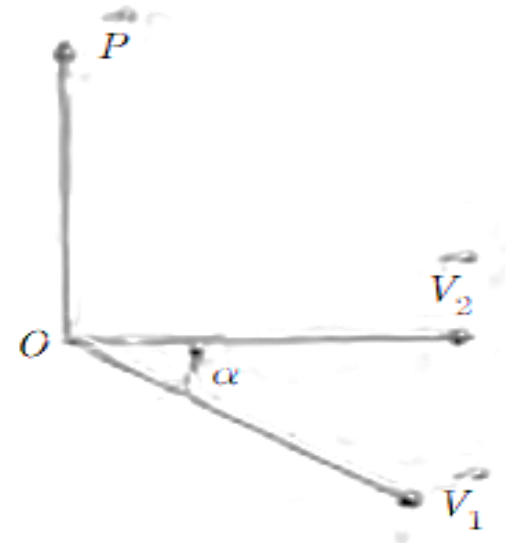
$$\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x = \vec{e}_y \cdot \vec{e}_y = \vec{e}_z \cdot \vec{e}_z = 1$$

3. Produit vectoriel

$$\vec{P} = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \vec{V}_1 * \vec{V}_2 |\sin \alpha|$$

$\vec{P}$ est un vecteur :

- perpendiculaire au plan $(\vec{V}_1, \vec{V}_2)$,
- orienté de telle sorte que le trièdre $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{P}$ soit direct,
- de norme $\vec{V}_1 * \vec{V}_2 |\sin \alpha|$ où $\alpha = (\vec{V}_1, \vec{V}_2)$.



- Le produit vectoriel de deux vecteurs parallèles est nul.
- Pour les vecteurs unitaires $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$, on a :

$$\|\vec{e}_x \wedge \vec{e}_y\| = \|\vec{e}_y \wedge \vec{e}_z\| = \|\vec{e}_z \wedge \vec{e}_x\| = 1$$

$$\vec{e}_x \wedge \vec{e}_x = \vec{e}_y \wedge \vec{e}_y = \vec{e}_z \wedge \vec{e}_z = 0$$

4. Produit vectoriel

- **Opérateur Nabla (∇)**

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

où

• $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ sont les vecteurs unitaires selon x, y, z .

- **Gradient d'un scalaire $\phi(x, y, z)$**

Le gradient d'une fonction scalaire ϕ est un vecteur :

$$\text{grad}(\phi) = \nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \mathbf{k}$$

- **Divergence d'un vecteur $\vec{A}=(A_x, A_y, A_z)$**

La divergence mesure le flux sortant du champ :

$$\text{div}(\vec{A}) = \nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

- **Rotationnel d'un vecteur $\vec{A}$**

Le rotationnel indique la rotation locale du champ :

$$\text{rot}(\vec{A}) = \nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

$$\text{rot}(\vec{A}) = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \mathbf{k}$$

II. Systèmes de coordonnées

1. Coordonnées cartésiennes :

Soient $R_0 (O, x_0 y_0 z_0)$ un repère direct orthonormé de base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et M la particule à repérer. Dans R_0 , la position de la

particule M est donnée par ses trois coordonnées cartésiennes (x, y, z) , le vecteur position s'écrit :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mM} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$$

❖ Déplacement élémentaire:

Le vecteur déplacement élémentaire MM' (M' est très voisin de M) s'écrit:

$$\overrightarrow{MM'} = d\overrightarrow{OM} = d\vec{M} = dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k}$$

(Dans R_0 , $d\vec{i} = d\vec{j} = d\vec{k} = 0$)

❖ Surfaces élémentaire:

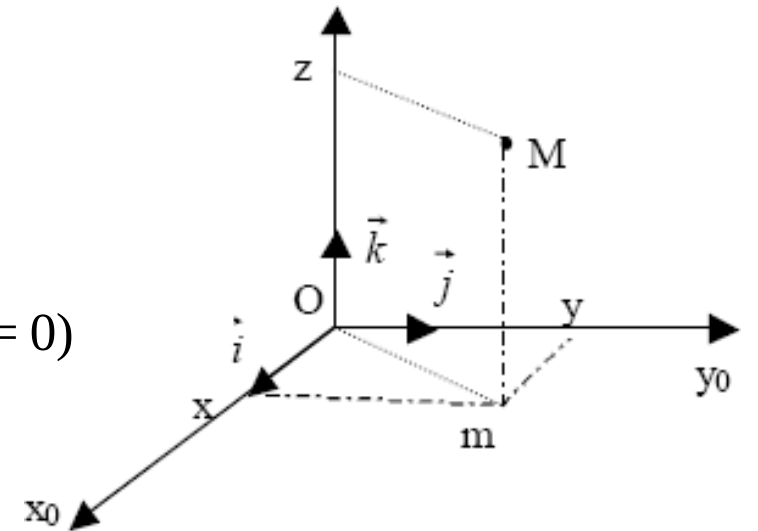
$$x = \text{cst} \quad dsx = dy * dz$$

$$y = \text{cst} \quad dsy = dx * dz$$

$$z = \text{cst} \quad dsz = dx * dy$$

❖ volume élémentaire:

$$dV = dx * dy * dz$$



2. Coordonnées cylindrique :

Dans le système de coordonnées cylindriques, la position de la particule M est donnée par trois coordonnées cylindriques (ρ, θ, z) définies comme suit :

$\rho = |\vec{Om}|$ m est la projection de M sur le plan $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$, $\theta = \text{angle}(\vec{Ox}_0, \vec{Om})$ et z est la projection du vecteur position $\vec{OM}$ sur l'axe $\vec{Oz}_0$.

Une nouvelle base orthonormée directe $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{k})$ est associée à ce système de coordonnées. Dans cette base, le vecteur position $\vec{OM}$ s'écrit :

$$\vec{OM} = \vec{Om} + \vec{mM} = \rho \vec{e}_\rho + z \vec{k}$$

❖ Déplacement élémentaire:

Le vecteur déplacement élémentaire $\vec{MM'}$ (M' est très voisin de M) s'écrit:

$$\vec{MM'} = d\vec{OM} = d\vec{M} = d\rho \vec{e}_\rho + \rho d\theta \vec{e}_\theta + dz \vec{k}$$

❖ Surfaces élémentaires:

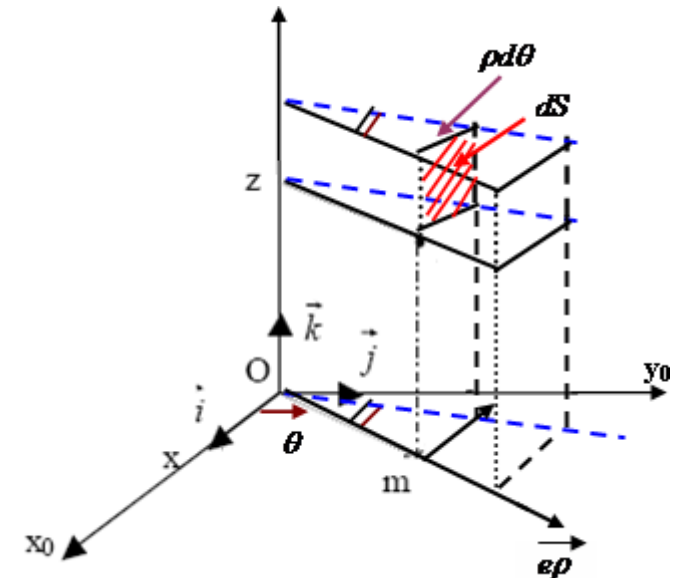
$$\theta = \text{cst} \quad ds_\theta = d\rho * dz$$

$$\rho = \text{cst} \quad ds_\rho = \rho d\theta * dz$$

$$z = \text{cst} \quad ds_z = \rho d\theta * d\rho$$

❖ volume élémentaire:

$$dV = \rho d\theta * d\rho * dz$$



3. Coordonnées sphérique :

Dans le système de coordonnées sphériques, la position de la particule M est donnée par trois coordonnées sphériques (r, φ, θ) définies comme suit :

$$r = |\overrightarrow{OM}| ; \theta = \text{angle}(\overrightarrow{Oz_0}, \overrightarrow{OM}) ; \varphi = \text{angle}(\overrightarrow{Ox_0}, \overrightarrow{Om})$$

Dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_\theta)$, le vecteur position s'écrit :

$$\overrightarrow{OM} = r \vec{e}_r$$

❖ Déplacement élémentaire:

Le vecteur déplacement élémentaire de la particule M en coordonnées sphériques est donné par :

$$d\overrightarrow{OM} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + r(\sin \theta) d\varphi \vec{e}_\varphi$$

❖ Surfaces élémentaire:

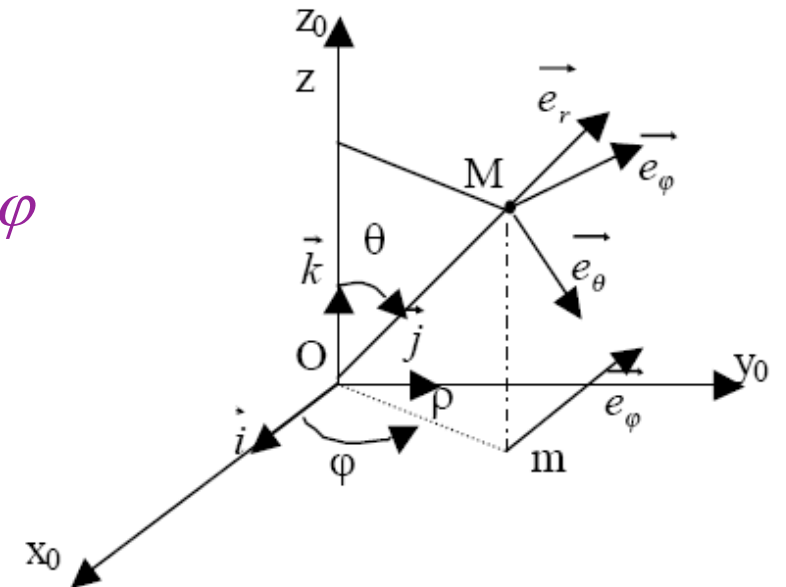
$$r = \text{cst} \quad dS_r = r \rho d\theta d\varphi ; \text{ avec } \rho = r \sin \theta \quad dS = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

$$\varphi = \text{cst} \quad ds_\varphi = r d\theta dr$$

$$\theta = \text{cst} \quad ds_\theta = r \sin \theta d\varphi dr$$

❖ volume élémentaire:

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$$



III. Intégrale

1. Intégral simple

$$\lim_{\infty} \sum_1^n f(x_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx$$

2. Intégral double

$$\iint f(x, y) dx dy = \int \left[\int f(x, y) dx \right] dy = \int \left[\int f(x, y) dy \right] dx$$

3. Intégrale triple

$$\iiint f(x, y, z) dx dy dz = \int dx \int dy \int f(x, y, z) dz = \int dy \int dz \int f(x, y, z) dx = \int dx \int dz \int f(x, y, z) dy$$

Remarque :

Les surfaces et volumes finis se calculent en intégrant ses éléments de surface dans les cas de système cylindrique ou sphérique

$$S = \iint dS \quad \text{et} \quad V = \iiint dv$$

Intégrale de surface Intégrale de volume

1. Surface élémentaire:

La surface élémentaire dS s'obtient par variation élémentaire des deux variables, θ et φ

$$\theta \rightarrow \theta + d\theta \text{ et } \varphi \rightarrow \varphi + d\varphi$$

$$\Rightarrow dS = r \rho d\theta d\varphi; \text{ avec } \rho = r \sin\theta$$

$$\Rightarrow dS = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi$$

2. Volume élémentaire:

Le volume élémentaire $d\tau$ s'obtient par variation élémentaire de trois variables, r, θ, φ

$$\theta \rightarrow \theta + d\theta ; \varphi \rightarrow \varphi + d\varphi ; r \rightarrow r + dr$$

$$\Rightarrow d\tau = dS dr = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi dr$$

Remarque :

IV. Angle solide

1. définition:

Surface ouverte	Surface ferme
Une surface qui s'appuie sur un contour ferme	Une surface qui s'appuie sur un plan ferme

2. Orientation d'une surface:

- la face interne est négative (-)
- la face externe est positive (+)

3. Vecteur élément de surface $\overrightarrow{dS}$:

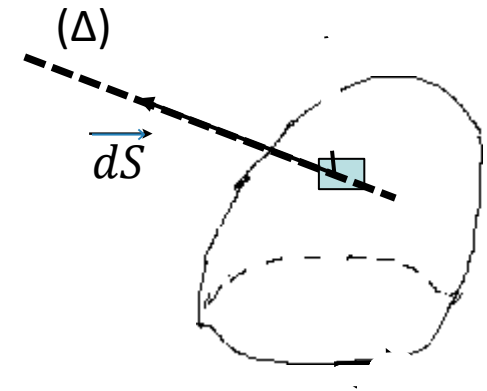
Surface élémentaire : dS

$$\overrightarrow{dS} = |\overrightarrow{dS}| \vec{n} \quad \text{telle que } |\vec{n}|=1$$

$\overrightarrow{dS}$: - direction : la droite (Δ) perpendiculaire sur dS

- sens : de l'intérieure vers extérieure

- modules : $|\overrightarrow{dS}| = dS$



4. Angle plan:

C'est l'angle sous lequel du point O on voit la droite [AB]

$$\theta = \frac{L}{R}$$

Angle plan élémentaire $d\theta$

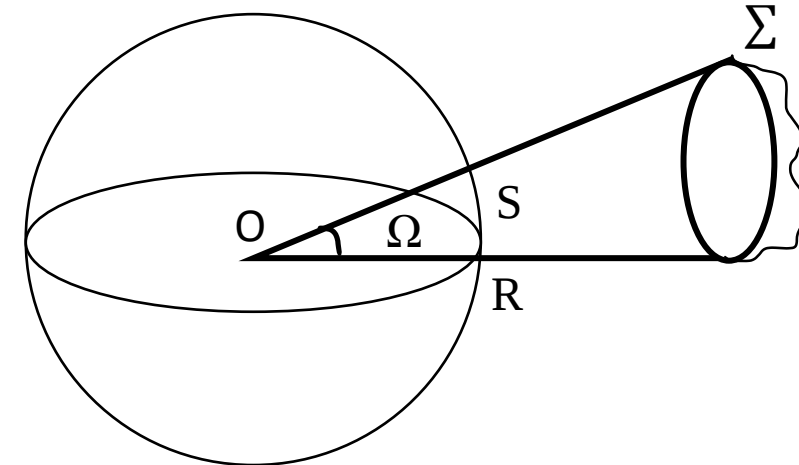
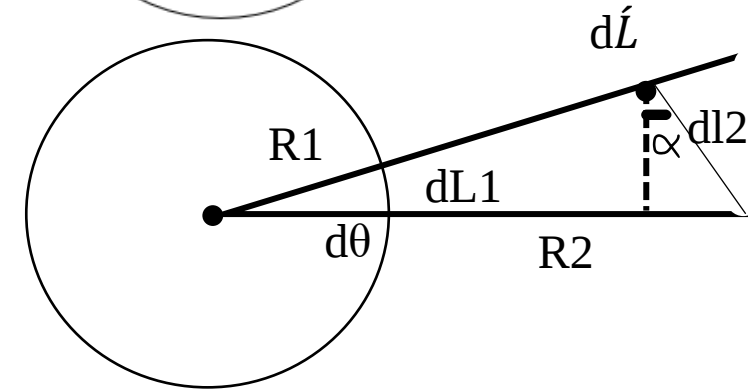
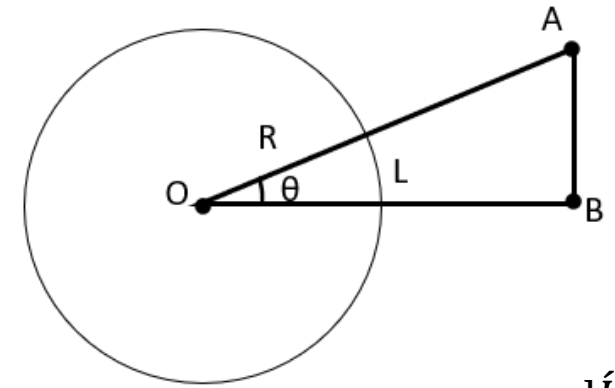
$$d\theta = \frac{dL_1}{R_1} = \frac{dL}{R_2} = \frac{dL_2 \cdot \cos \alpha}{R_2}$$

5. Angle solide:

La portion d'espace délimitée par les génératrices du cône de sommet O correspond à un angle dit « solide », noté Ω .

L'angle solide Ω est défini par : $\Omega = \frac{\Sigma}{R^2}$

Σ est la surface d'intersection d'une sphère de centre O et de rayon R avec la portion d'espace caractérisée par Ω



Angle solide élémentaire

La surface élémentaire dS , autour du point M est vue de O sous l'angle solide $d\Omega$

$$\text{Par définition : } d\Omega = \frac{\vec{dS} \cdot \vec{u}}{r^2} = \frac{dS \vec{n} \cdot \vec{u}}{r^2} = \frac{dS \cos \theta}{r^2} = \frac{d\Sigma}{r^2}$$

L'angle solide sous lequel on voit une surface finie s s'obtient en intégrant $d\Omega$

$$\Omega = \iint_s d\Omega$$

