

Filière Génie Civil – 3<sup>e</sup> année

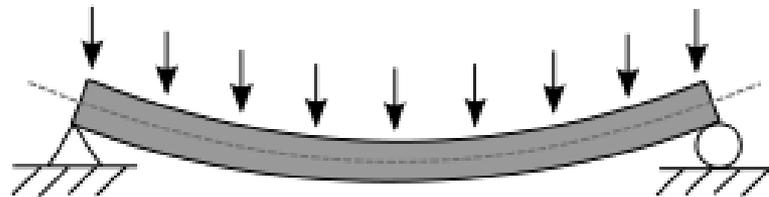
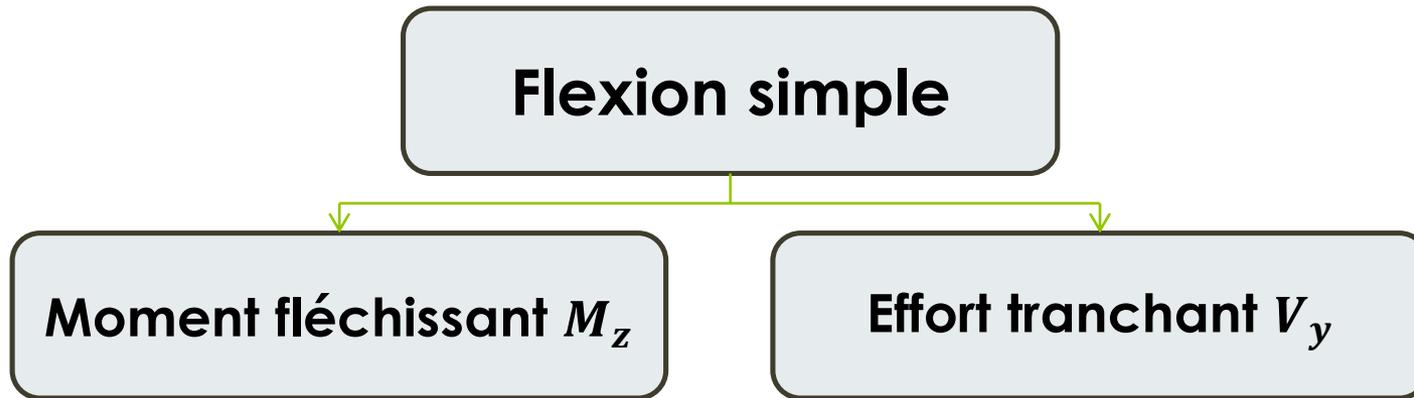
# Cours de béton armé 1

---

Justification des poutres fléchies sous  
solicitation d'effort tranchant  
- Aciers transversaux -

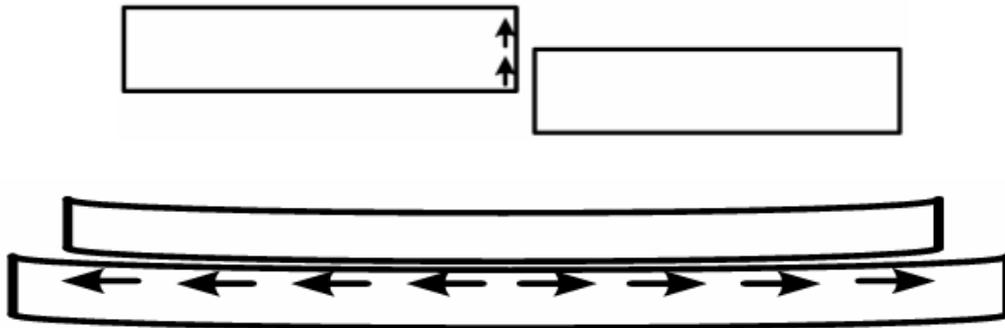
Préparé par : Mme. Asmae Hakim

# Introduction



# Introduction

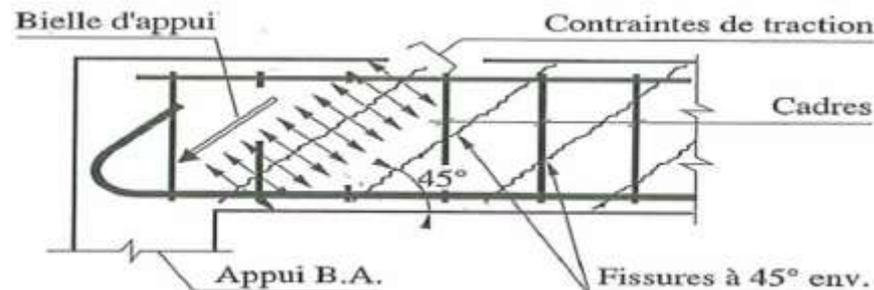
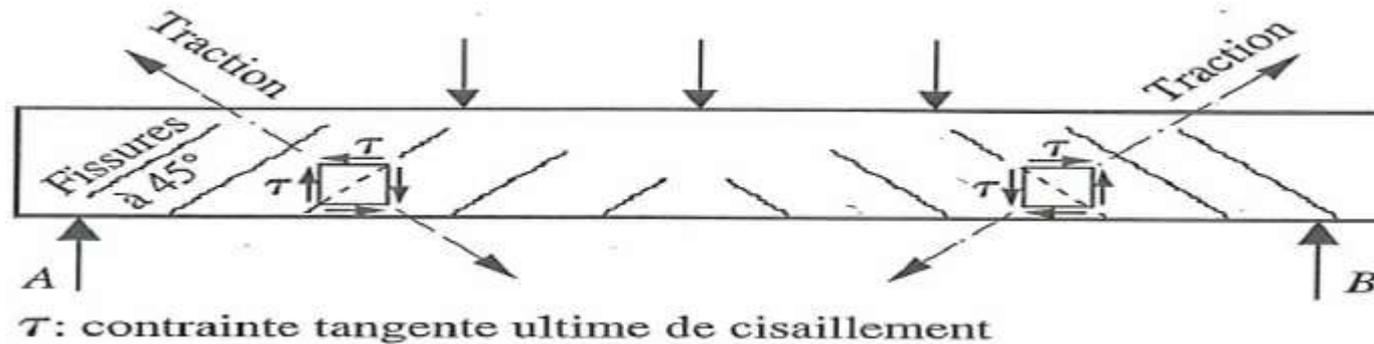
Dans une poutre de section constante, soumise à la flexion simple, l'effort tranchant tend à faire glisser les plans de cette section les uns par rapport aux autres (direction perpendiculaire ou parallèle au plan moyen).



Il en résulte dans cette section des contraintes de cisaillement  $\tau$  appelées des contraintes tangentés.

# Introduction

Le béton, par sa faible résistance à la traction, ne peut pas équilibrer les contraintes engendrées par l'effort tranchant et donc il risque de se fissurer. Il est important donc d'ajouter des armatures transversales (cadres, étriers) afin de solidariser ces fissures.



# Dispositions constructives

Les justifications à effectuer pour les poutres sous sollicitations d'effort tranchant concernent :

- La contrainte tangente ultime de cisaillement en béton.
- Les armatures transversales de l'âme (ex : cadres, étriers)
- Les zones d'appuis des poutres (appuis simple d'about, appuis intermédiaire)

## Remarque :

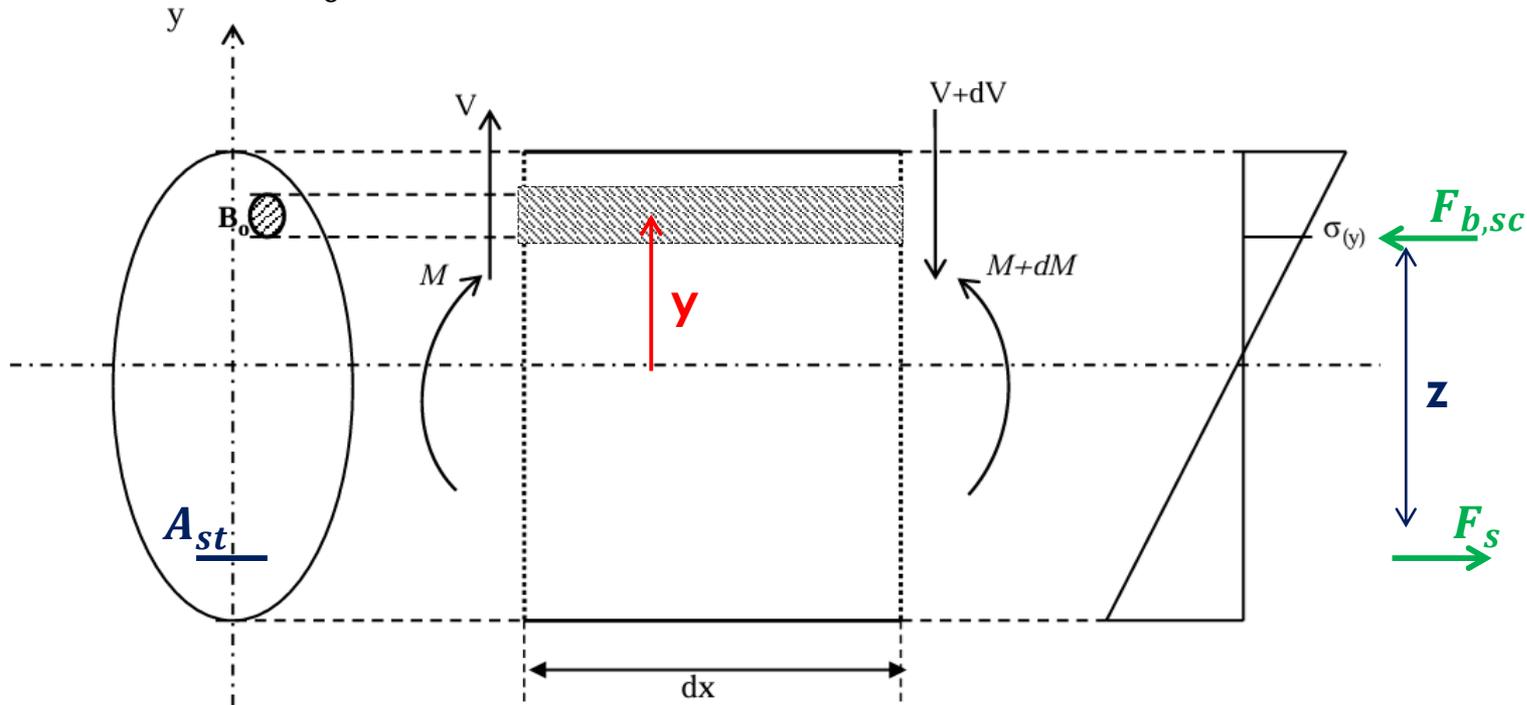
L'effort tranchant  $V_u$  est déterminée à l'état limite ultime ELU. Pour une poutre de longueur  $L$  chargée uniformément, l'effort tranchant maximal est atteint au niveau des appuis et a pour expression :

$$V_u = \frac{P_u L}{2}$$

Avec :  $P_u = 1,35G + 1,5Q$

# Contrainte tangente

On considère un tronçon de poutre de longueur  $dx$ . On prend un élément  $B_0$  de sa section transversale.



La contrainte normale à l'ELS à la distance  $y$  de l'axe neutre :

$$\sigma_y = \frac{M}{I} \cdot y$$

# Contrainte tangente

$I$  : moment d'inertie par rapport à l'axe neutre de la section réduite homogène (béton + armatures comprimées).

La résultante des forces agissant sur l'élément de surface  $B_0$  :

$$F_b = \int_{B_0} \sigma_y \cdot dB = \frac{M}{I} \cdot \int_{B_0} y \cdot dB$$
$$F_B = \frac{M}{I} \cdot S_B$$

Avec :

$S_B = \int_{B_0} y \cdot dB$  : moment statique par rapport à l'axe neutre de l'aire homogène  $B_0$ .

- **Effort de glissement :**

On appelle effort de glissement par unité de longueur de la poutre, la quantité :

$$g = \frac{dF_B}{dx} = \frac{dM}{dx} \cdot \frac{S_B}{I}$$

# Contrainte tangente

On sait que :

$$V = \frac{dM}{dx}$$

Donc :

$$\boxed{g = \frac{V \cdot S_B}{I}} \quad (1)$$

En écrivant les équations d'équilibre de la section totale, obtient :

$$\sum M_{/F_s} = 0 \Rightarrow -M + F_B \cdot z = 0 \Rightarrow F_B = \frac{M}{z}$$

$$F_B = \frac{M}{I} \cdot S_B \quad \text{et} \quad F_B = \frac{M}{z}$$

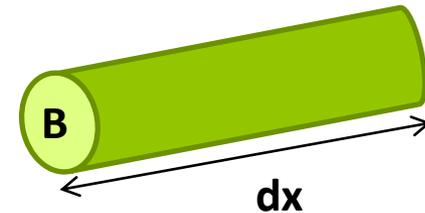
$$\boxed{z = \frac{I}{S_B}} \quad (2)$$

(2) Dans (1)  $\Rightarrow g = \frac{V}{z} = \text{cste}$  sur toute la section de la poutre

# Contrainte tangente

Sous l'effet du glissement  $g$ , l'élément volumique de la poutre, sous forme prismatique, a tendance à glisser par rapport à la poutre ; c'est l'effet de l'effort tranchant.

L'équilibre du prisme de base  $B$  et de longueur  $dx$  est assuré par des contraintes tangentes qui se développent sur la surface de glissement du prisme par rapport à la poutre.



$\tau$  : contrainte tangente en tout point de la surface latérale du prisme.

$u$  : périmètre de la section  $B$  (longueur de la section de glissement)

Il vient que :

$$\tau = \frac{dF_B}{S} = \frac{dF_B}{u \cdot dx}$$

$S$  : surface de glissement du prisme par rapport à la poutre.

$$\tau = \frac{1}{u} \cdot \frac{dF_B}{dx} = \frac{g}{u}$$
$$\Rightarrow \tau = \frac{V}{u \cdot z} = \frac{V \cdot S_B}{I \cdot u}$$

# Contrainte tangente conventionnelle

$$\tau = \frac{V}{u \cdot z}$$

En majorant l'élément de surface  $B$  sur surface totale de la poutre, la contrainte tangente conventionnelle à utiliser dans les calculs d'une section rectangulaire est :

$u = b_0$  ; largeur de la poutre

$$\tau_u = \frac{V_u}{b_0 \cdot d}$$

$\tau_u$  : contrainte tangente conventionnelle en Mpa

$V_u$  : Effort tranchant calculé à l'ELU en MN.

$b_0$  : largeur de la poutre en m

$d$  : hauteur utile en m.

# Vérifications de la contrainte

Le règlement BAEL indique les valeurs limites de la contrainte tangente, suivant le type de fissuration. On doit vérifier que  $\tau_u \leq \bar{\tau}_u$  avec :

- Fissuration non ou peu préjudiciable :

$$\bar{\tau}_u = \min\left(\frac{0,2f_{cj}}{\gamma_b}; 5\text{MPa}\right)$$

- Fissuration préjudiciable ou très préjudiciable :

$$\bar{\tau}_u = \min\left(\frac{0,15f_{cj}}{\gamma_b}; 4\text{MPa}\right)$$

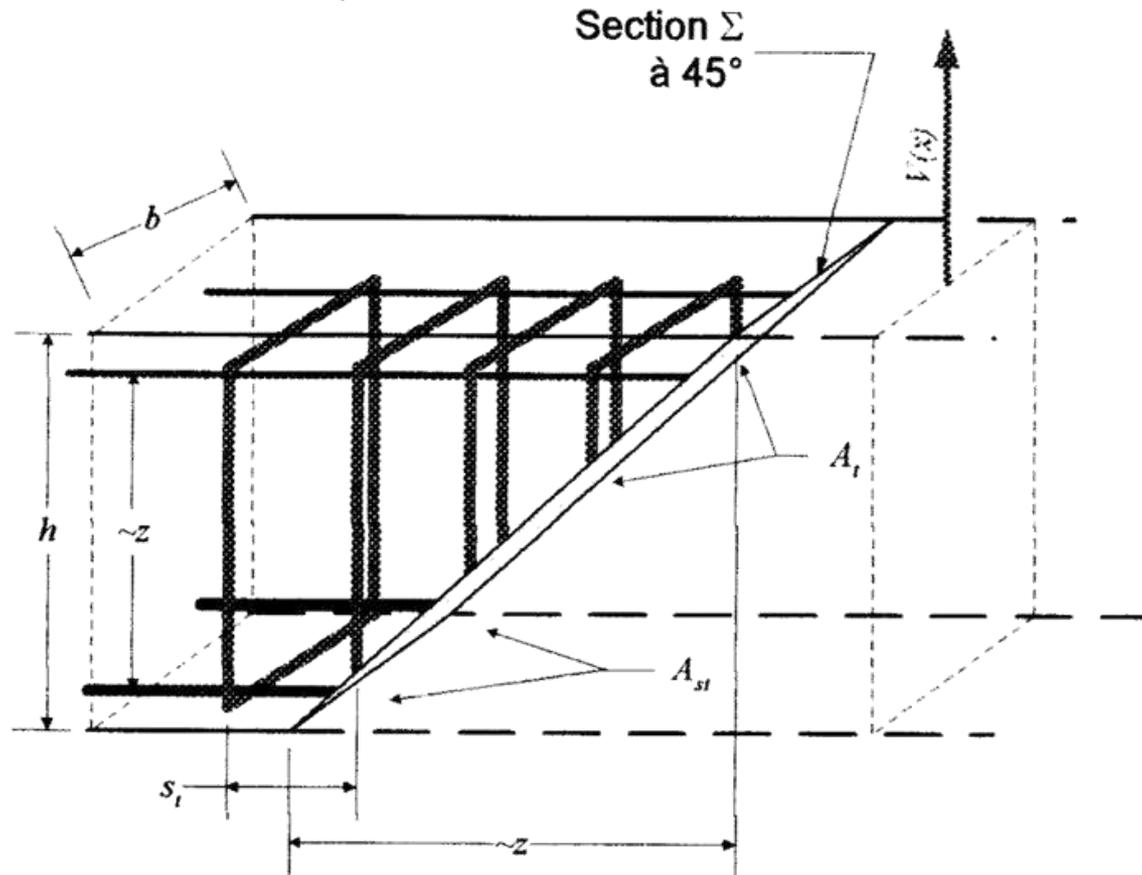
- Si  $\tau_u \leq \bar{\tau}_u \rightarrow$  **armatures droites.**
- Si  $\tau_u > \bar{\tau}_u \rightarrow$  **armatures inclinées de 45°** pour mieux répartir l'effort à condition que  $\tau_u \leq \bar{\tau}_u = \min\left(\frac{0,27f_{cj}}{\gamma_b}; 7\text{MPa}\right)$ , sinon on doit redimensionner la section du béton.
- **Cas particulier :**

Si  $\tau_u \leq \min\left(\frac{0,06f_{cj}}{\gamma_b}; 1,5\text{MPa}\right) \Rightarrow$  La section est entièrement comprimée, il n'y a pas lieu de faire les vérifications qui suivent, la section est calculée comme un poteau en compression simple.

# Sections des armatures

Selon le règlement BAEL, les aciers transversales font avec l'axe longitudinal de la poutre un angle  $\alpha$  compris entre  $45^\circ$  et  $90^\circ$

On considère la représentation suivante d'une poutre armée par des cadres verticaux ( $\alpha = 90^\circ$ ).



# Sections des armatures

La section  $\Sigma$  à l'abscisse  $x$  représente une fissure à  $45^\circ$ .

Isolons le côté gauche de la poutre. Au droit de la section, est présent l'effort tranchant  $V(x)$ .

Une des conditions de l'état limite ultime ELU est que la résistance du béton à la traction est négligée, donc seuls les aciers transversaux peuvent reprendre l'effort tranchant  $V(x)$ .

La section totale des armatures coupant la section  $\Sigma$  est de  $N \cdot A_t$ . Avec  $N$  est le nombre de cadre coupant la section.

Dans ce cas, la section s'étend sur une largeur  $z$  et chaque deux cadres successifs sont distancés de  $S_t$ . Donc  $N = \frac{z}{S_t}$ .

La section totale des armatures coupant  $\Sigma$  vaut donc  $\frac{z}{S_t} \cdot A_t$

L'effort que reprend ces cadres doit être supérieur à l'effort tranchant afin d'équilibrer la poutre, donc :

$$V(x) \leq \frac{z}{S_t} \cdot A_t \cdot \sigma_{st}$$

# Sections des armatures

Puisque les calculs se font à l'ELU, il vient que :  $V(x) = V_u$  et  $\sigma_{st} = f_{su}$

$$V_u \leq \frac{z}{S_t} \cdot A_t \cdot f_{su}$$

En introduisant la contrainte tangente conventionnelle :

$$\tau_u \cdot b \cdot d \leq \frac{z}{S_t} \cdot A_t \cdot f_{su}$$

Avec  $d = \frac{z}{0,9}$  :

$$\frac{A_t}{S_t} \geq \frac{\tau_u \cdot b}{0,9 \cdot f_{su}}$$

Mais, l'expérience montre que le béton reprend une partie de l'effort de traction, diminuant ainsi la contrainte reprise par les armatures :

$$\frac{A_t}{S_t} \geq \frac{(\tau_u - 0,3f_{tj} \cdot k) \cdot b}{0,9 \cdot f_{su}}$$

Dans la pratique, on se fixe une valeur de la section d'armatures et on fait varier l'espacement  $S_t$ .

# Sections des armatures

Dans le cas des armatures inclinées d'un angle  $\alpha \neq 90^\circ$ ,  
Le rapport de la section  $A_t$  sur l'espacement  $S_t$  devient :

$$\frac{A_t}{b_0 S_t} \geq \frac{\gamma_s (\tau_u - 0,3 f_{tj} k)}{0,9 f_e (\cos(\alpha) + \sin(\alpha))} \quad (*)$$

$\alpha$ : angle d'inclinaison des armatures ( $90^\circ$  si elles sont droites)

$S_t$ : espacement de deux cadres successifs.

$$k = \begin{cases} 1 & \text{en flexion simple} \\ 0 & \text{si reprise de bétonnage non traitée ou si fissuration très préjudiciable} \\ 1 + \frac{3\sigma_{cm}}{f_{c28}} & \text{en flexion composée avec compression } (\sigma_{cm} \text{ contrainte moy de compression}) \\ 1 - \frac{10\sigma_{tm}}{f_{c28}} & \text{en flexion composée avec traction } (\sigma_{tm} \text{ contrainte moy de traction}) \end{cases}$$

# Dispositions constructives

- **Diamètre des armatures :**

Le diamètre  $\phi_t$  des armatures transversales doit vérifier :

$$\phi_t \leq \min \left( \frac{h}{35} ; \phi_l ; \frac{b_0}{10} \right)$$

avec  $\phi_l$  diamètre des armatures longitudinales

- **Espacement des armatures :**

L'espacement minimal entre les armatures doit vérifier :

$$* \frac{A_t f_e}{b_0 S_t \sin(\alpha)} \geq \min \left( \frac{\tau_u}{2} ; 0,4 MPa \right)$$

$$* S_t \leq \min(0,9d ; 40cm)$$

# Répartition des armatures

- **Méthode de Caquot :**

La méthode est applicable uniquement aux poutres chargées uniformément et de section constante.

On note  $l_0$  distance du nu d'appui à la section où l'effort tranchant s'annule.

**Démarche à suivre :**

- Déterminer le diamètre  $\phi_t$  des armatures transversales ( $\phi_t < \frac{\phi_l}{3}$ )
- Calculer la section transversale de l'armature  $A_t$
- Déterminer l'espacement initial  $S_{t0}$  à partir de l'inéquation (\*)

Pour des raisons de mise en œuvre, les espacements sont choisis de la série de Caquot :

**7 - 8 - 9 - 10 - 11 - 13 - 16 - 20 - 25 - 35 - 40 (cm)**

- Déterminer les espacements suivants en utilisant la méthode de Caquot, en choisissant des chiffres entiers de la série.

**Remarque :** le calcul des espacements dans une poutre se fait pour la demi portée, la deuxième moitié se déduit par symétrie.

# Répartition des armatures

- **Méthode de Caquot :**

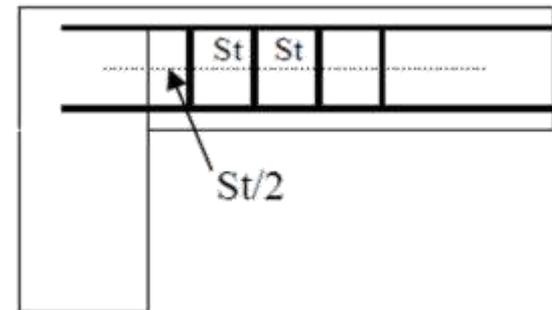
- Le premier cadre est placé à une distance de  $\frac{S_{t0}}{2}$  du nu d'appui.
- Depuis l'espacement  $\frac{S_{t0}}{2}$ , on répète les espacements successifs  $S_{ti+1} \geq S_{ti}$  (de la suite) avec un nombre de répétition :

$$\begin{cases} l'_0 + \frac{5h}{6S_{t0}} & \text{pour le premier espacement} \\ l'_0 & \text{pour les espacemenets suivants} \end{cases}$$

Avec :

$$l'_0 = \left( l_0 - \frac{5h}{6} \right) \left( 1 - \frac{0,3k \cdot f_{tj}}{\tau_{u0}} \right)$$

$$\tau_{u0} = \frac{V_{u,max} - P_u \cdot \frac{5h}{6}}{b \cdot d}$$



Pour résumer, le choix des espacements se fait depuis la série de Caquot, et le nombre de répétition de chaque espacement est calculé selon le tableau suivant :

# Répartition des armatures

- Méthode de Caquot :

$s_t$	$\frac{s_{t0}}{2}$	$s_{t1}$	$s_{t2}$	---	$s_{ti}$
Nombre de répétition $n_i$ calculé		$l'_0 + \frac{5h}{6s_{t0}}$	$l'_0$	---	$l'_0$
Nombre cumulé		$l'_0 + \frac{5h}{6s_{t0}}$	$2l'_0 + \frac{5h}{6s_{t0}}$	---	$il'_0 + \frac{5h}{6s_{t0}}$
Nombre cumulé arrondi		$m1$	$m2$	---	$m_i$
Nombre de répétition adopté $n_i$		$n1 = m1$	$n2 = m2 - m1$	---	$n_i = m_i - m_{i-1}$
Abscisse	$\frac{s_{t0}}{2}$	$\frac{s_{t0}}{2} + n1s_{t1}$	$\frac{s_{t0}}{2} + n1s_{t1} + n2 * s_{t2}$	---	-----

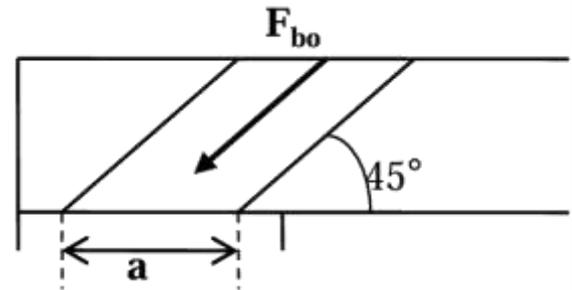
# Justification des zones d'appuis

## ❖ Appui simple d'about :

À l'appui simple d'about d'une poutre on admet que les charges sont transmises par l'intermédiaire d'une bielle unique, dite **bielle d'about**, inclinée à **45°** sur l'axe de la poutre (A.5.1,311).

### - **Vérification des armatures longitudinales :**

On doit prolonger au-delà du bord de l'appui (côté travée) et y ancrer une section d'armatures longitudinales inférieures suffisante pour équilibrer l'effort tranchant  $V_u$ .



La section à envisager ici est au moins égale à :

$$A_s \geq \frac{\gamma_s \cdot V_u}{f_e}$$

### - **Vérification de la contrainte de compression :**

La contrainte de compression dans la bielle doit vérifier :

$$\sigma_c = \frac{2 \cdot V_u}{b_0 \cdot a} \leq \frac{0,8 \cdot f_{cj}}{\gamma_b}$$

Avec : ( $a = b - 2 - c$ )

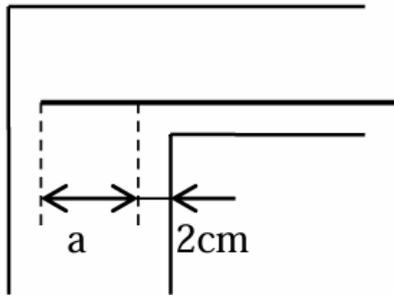
**b** étant la longueur de l'appui et **c** : enrobage.

# Justification des zones d'appuis

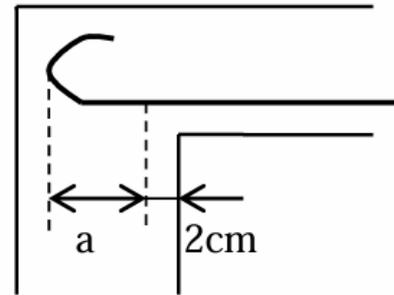
## ❖ Appui simple d'about :

Le scellement des armatures peut prendre les formes suivantes :

- **Poutre rectangulaire reposant sur un poteau solidaire :**

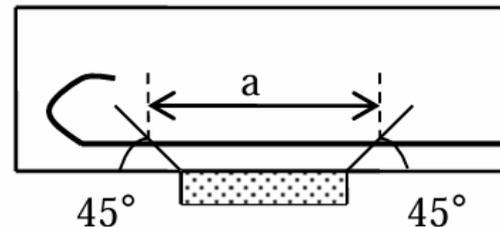
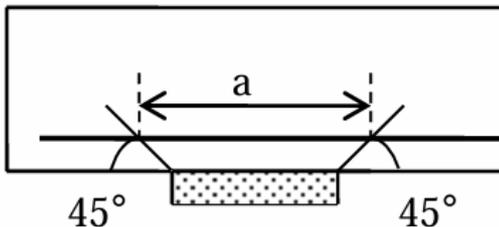


Armature inférieure  
avec ancrage droit



Armature inférieure  
avec ancrage courbe

- **Poutre rectangulaire reposant sur un appareil d'appui :**



# Justification des zones d'appuis

## ❖ Appui intermédiaire :

Un appui intermédiaire développe un moment fléchissant, noté  $M_u$  à l'ELU. L'armature longitudinale doit donc équilibrer l'effort tranchant + le moment induit par l'appui, donc un effort total de :

$$V_u + \frac{M_u}{0,9d}$$

La section d'armatures à ancrer dans l'appui doit vérifier :

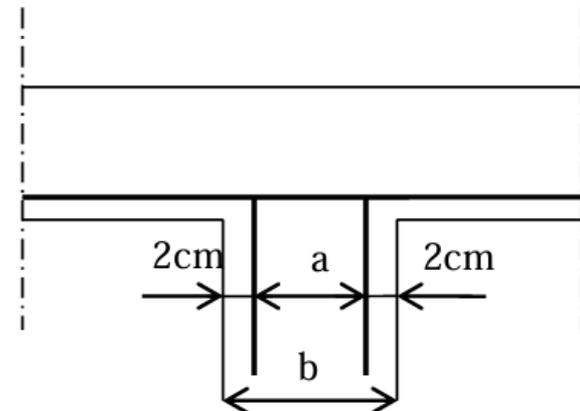
$$A_s \geq \frac{\gamma_s}{f_e} \cdot \left( V_u + \frac{M_u}{0,9d} \right)$$

La contrainte de compression doit vérifier :

$$\sigma_c = \frac{2 \cdot V_u}{b_0 \cdot a} \leq \frac{0,8 \cdot f_{cj}}{\gamma_b}$$

ou  $V_u \leq 0,267 \cdot a \cdot b \cdot f_{cj}$

Avec :  $(a = b - 2 - 2)$



## Justification des poutres fléchies sous sollicitations d'effort tranchant

### - Aciers transversaux -

#### Hypothèses de calcul :

- Le calcul se fait seulement à l'ELU.
- La justification d'une section concerne les armatures transversales ainsi que la contrainte du béton

#### Calcul de la contrainte tangente conventionnelle :

La contrainte tangentielle de cisaillement est :

$$\tau_u = \frac{V_u}{b_0 \cdot d}$$

$V_u$  : Effort tranchant maximal à l'ELU.

$b_0$  : Largeur de la poutre.

$d$  : Hauteur utile de la poutre.

#### Vérifications des contraintes :

**Cas particulier :** Si  $\tau_u \leq \min\left(\frac{0,06f_{cj}}{\gamma_b}; 1,5MPa\right) \Rightarrow$  La section est entièrement comprimée, il n'y a pas lieu de faire les vérifications qui suivent, la section est calculée comme un poteau en compression simple.

Sinon, on doit vérifier que  $\tau_u \leq \bar{\tau}_u$  avec :

- Fissuration non ou peu préjudiciable :  $\bar{\tau}_u = \min\left(\frac{0,2f_{cj}}{\gamma_b}; 5MPa\right)$
- Fissuration préjudiciable ou très préjudiciable :  $\bar{\tau}_u = \min\left(\frac{0,15f_{cj}}{\gamma_b}; 4MPa\right)$

$\Rightarrow$  Si  $\tau_u \leq \bar{\tau}_u \rightarrow$  **armatures droites.**

$\Rightarrow$  Si  $\tau_u > \bar{\tau}_u \rightarrow$  **armatures inclinées de 45° à condition que**

$\tau_u \leq \bar{\tau}_u = \min\left(\frac{0,27f_{cj}}{\gamma_b}; 7MPa\right)$ , sinon on redimensionne la section du béton.

#### Section des armatures $A_t$ :

$$\Phi_t \approx \frac{\Phi_l}{3} \quad ; A_t = n * \frac{\pi}{4} \Phi_t^2 \quad ; n : \text{nbr de brins verticaux} (n = 2 \text{ pour un cadre})$$

$$\frac{A_t}{b_0 S_t} \geq \frac{\gamma_s (\tau_u - 0,3 f_{tj} k)}{0,9 f_e (\cos(\alpha) + \sin(\alpha))} \quad (*)$$

$\alpha$  : angle d'inclinaison des armatures

$S_t$  : espacement de deux cadres successifs.

$$k = \begin{cases} 1 & \text{1 en flexion simple} \\ 0 & \text{si reprise de bétonnage non traitée ou si fissuration très préjudiciable} \\ 1 + \frac{3\sigma_{cm}}{f_{c28}} & \text{en flexion composée avec compression } (\sigma_{cm} \text{ contrainte moy de compression}) \\ 1 - \frac{10\sigma_{tm}}{f_{c28}} & \text{en flexion composée avec traction } (\sigma_{tm} \text{ contrainte moy de traction}) \end{cases}$$

À vérifier que :

- $\frac{A_t f_e}{b_0 S_t \sin(\alpha)} \geq \min\left(\frac{\tau_u}{2}; 0,4MPa\right)$
- $S_t \leq \min(0,9d; 40cm)$
- $\phi_t \leq \min\left(\frac{h}{35}; \phi_1; \frac{b_0}{10}\right)$  avec  $\phi_1$  diamètre des armatures longitudinales

### **Méthode de Caquot pour la répartition des armatures :**

$$l_0 = \begin{cases} \frac{l}{2} & \text{(poutre sur deux appuis simples)} \\ l & \text{(poutre console)} \end{cases}$$

On calcule :

$$\tau_{u0} = \frac{V_{u\max} - P_u \cdot \frac{5h}{6}}{b_0 d} \quad ; \quad l'_0 = \left(l_0 - \frac{5h}{6}\right) \left(1 - \frac{0,3k f_{tj}}{\tau_{u0}}\right)$$

### **Démarche à suivre :**

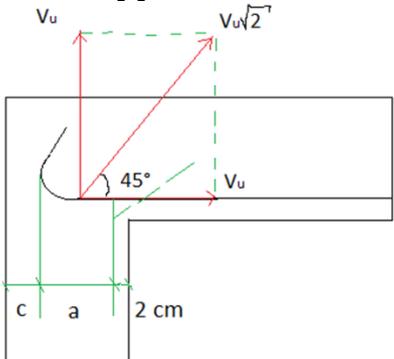
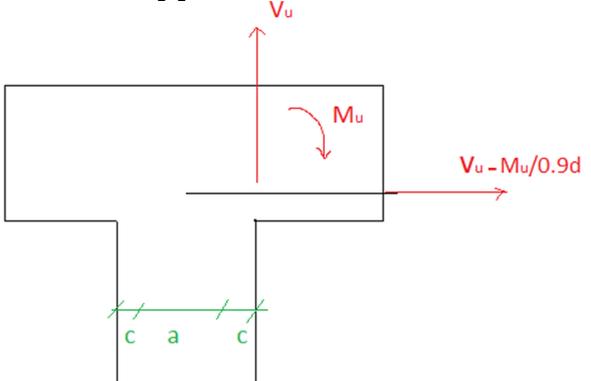
- On calcule l'espacement initial  $S_{t0}$  par la formule (\*)
- Position du premier cours d'armatures à une distance  $\frac{S_{t0}}{2}$  du nu d'appui
- Les espacements suivants sont choisis depuis la série de Caquot :

**7 - 8 - 9 - 10 - 11 - 13 - 16 - 20 - 25 - 35 - 40**

À partir de  $\frac{S_{t0}}{2}$ , on répète les espacements selon le tableau suivant :

$S_t$	$\frac{S_{t0}}{2}$	$S_{t0}$	$S_{t1}$	$S_{t2}$	...
Nombre de répétitions	-	$l'_0 + \frac{5h}{6S_{t0}}$	$l'_0$	$l'_0$	...
Nombre cumulé	-	$l'_0 + \frac{5h}{6S_{t0}}$	$2l'_0 + \frac{5h}{6S_{t0}}$	$3l'_0 + \frac{5h}{6S_{t0}}$	...
Nombre arrondi	-	$m_1$	$m_2$	$m_3$	...
Nombre de répétitions	-	$n_1 = m_1$	$n_2 = m_2 - m_1$	$n_3 = m_3 - m_2$	...
abscisse	$\frac{S_{t0}}{2}$	$\frac{S_{t0}}{2} + n_1 S_{t0}$	$\frac{S_{t0}}{2} + n_1 S_{t0} + n_2 S_{t1}$	$\frac{S_{t0}}{2} + n_1 S_{t0} + n_2 S_{t1} + n_3 S_{t2}$	...

## Justification au niveau des appuis :

<b><u>Appui de rive</u></b>	<b><u>Appui intermédiaire</u></b>
	
<ul style="list-style-type: none"> <li>• <b><u>Vérification de la profondeur utile de l'appui :</u></b>  <math>a = \text{longueur de l'appui} - c - 2\text{cm}</math>  <math display="block">\frac{3,75V_u}{\bar{b} \cdot f_{c28}} \leq a \leq 0,9d</math> </li> <li>• <b><u>Vérification de la contrainte de compression :</u></b>  <math display="block">\sigma_{bc} = \frac{2V_u}{\bar{b} \cdot a} \leq \frac{0,8f_{c28}}{\gamma_b}</math> </li> <li>• <b><u>Section minimale des armatures longitudinales inférieures sur appui :</u></b>  <math display="block">A_s \geq \frac{V_u \cdot \gamma_s}{f_e}</math> </li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li> <math display="block">V_u = \max(V_d; V_g)</math>  <math display="block">R_u =  V_d  +  V_g </math> </li> <li>• <b><u>Vérification de la profondeur utile de l'appui :</u></b>  <math>a = \text{longueur de l'appui}(\bar{b}) - 2c</math>  <math display="block">a \geq \frac{3,75V_u}{\bar{b} \cdot f_{c28}}</math> </li> <li>• <b><u>Vérification de la contrainte de compression :</u></b>  <math display="block">\sigma_{bc} = \frac{R_u}{\bar{b} \cdot a} \leq \frac{1,3f_{c28}}{\gamma_b}</math> </li> <li>• <b><u>Section minimale des armatures longitudinales inférieures sur appui :</u></b>  <math display="block">A_s \geq \frac{\gamma_s}{f_e} \left  V_u - \frac{M_u}{0,9d} \right </math> </li> </ul>