



ESIAI

ECOLE SUPÉRIEURE D'INGÉNIERIE
APPLIQUÉE ET INNOVATION

Module de

*Résistance des
Matériaux*

Polycopié : Cours

Pr. R. KOUDDANE

3^{ème} GENIE CIVIL

Cours de Résistance des Matériaux

Redouane KOUDDANE

1 Septembre 2018

Table des matières

1	Généralités	5
1.1	Les objectifs	5
1.2	Les problèmes rencontrés	5
1.2.1	Calcul de Résistance	5
1.2.2	Calcul de Rigidité	5
1.2.3	Calcul de Vérification	6
1.2.4	Choix du Matériaux	6
1.3	Les Moyens	6
1.3.1	Principe Fondamental de la Statique	6
1.3.2	L'Expérimentation	6
1.3.3	Les modèles Théoriques	7
1.4	Les principaux Développement en RdM	7
2	Hypothèses de la RdM	8
2.1	Hypothèses sur le Matériau	8
2.2	Hypothèse sur la Disposition de la Matière	8
2.3	Hypothèses sur Actions Mécaniques Extérieures	9
2.4	Hypothèses sur les Déformations	10
3	Torseur de cohésion	12
3.1	Définition de la Coupe Fictive	12
3.2	Définition du Torseur de Cohésion	12
3.3	Etude des Actions Mécaniques Extérieures à E	13
3.4	Relation Entre Torseur de Cohésion et Torseur des AM Ex- térieures à la Poutre	14
3.5	Repère de Définition des Sollicitations	15
3.6	Domination des Composantes du Torseur de Cohésion	16
3.7	Diagrammes	17
3.8	Définitions des Sollicitations	17
4	Notion de Contrainte	20

5	Etude des sollicitations simples	23
5.1	Traction Pure - Compression Pure	23
5.1.1	Définitions	23
5.1.2	Contraintes	24
5.1.3	Déformations	24
5.1.4	Essai de Traction	25
5.1.5	Conditions de Résistance	31
5.1.6	Problèmes réels de la Traction	32
5.2	Flexion Plane : Flexion Pure - Flexion Simple	33
5.2.1	Définitions	33
5.2.2	Propriétés	34
5.2.3	Exercices	34
5.2.4	Contraintes	37
5.2.5	Analyse des composantes du vecteur contrainte	37
5.2.6	Etude la répartition des contraintes normales dues au moment fléchissant	37
5.2.7	Déformations	38
5.2.8	Conditions de Résistance	40
6	Etude des Sections Droites	41
6.1	Centre de Surface	41
6.2	Moments de la Section Droite	42
6.2.1	Définitions	42
6.2.2	Théorème de HUYGHENS	42
6.2.3	Exemples	43
6.3	Exercices	45
6.3.1	Exercice n° 1	45
6.3.2	Exercice n° 2	45
6.3.3	Exercice n° 3	46
7	Treillis plans isostatiques	47
7.1	Définitions	47
7.1.1	Les Efforts	47
7.1.2	Isostatisme	48
7.1.3	Indéformabilité	49
7.2	Calcul des Efforts	49
7.3	Critère de Résistance	51
8	Le Flambage	52
8.1	Introduction	52
8.2	Flambage d'Euler	53
8.3	Hypothèses	53
8.3.1	Etude de la déformation de flambage	53
8.3.2	Charge critique d'Euler	54

8.3.3	Longueur libre de flambage	55
8.3.4	Résistance au flambage d'Euler	55
9	Principe de Superposition : Application à la Résolution de Problèmes Hyperstatiques	57
9.1	Principe de Superposition	57
9.1.1	Enoncé	57
9.1.2	Illustration	57
9.2	Isostatisme-Hyperstatisme : Rappel	58
9.3	Application du Principe de Superposition à la Résolution d'un Problème Hyperstatique	59
9.4	Exercices	63
9.4.1	Exercice 1	63
9.4.2	Exercice 2	63

Chapitre 1

Généralités

1.1 Les objectifs

Dans le cadre du cours de Mécanique de 1ère année vous avez étudié le mouvement et l'équilibre de solides indéformables. L'expérience montre que, soumis à des forces, les solides se déforment et peuvent se rompre. La résistance des matériaux (RdM) se propose donc d'étudier les déformations et les limites de résistance des pièces mécaniques. Plus généralement, on étudie en RdM le comportement de solides réels, donc déformables, sous l'action de forces extérieures. La résistance des matériaux doit permettre d'assurer :

- la sécurité des constructions ou des mécanismes, en calculant leur résistance et en s'assurant que leurs déformations restent compatibles avec le bon fonctionnement des machines,
- la réalisation de constructions économiques, en localisant la matière là où elle est utile.

1.2 Les problèmes rencontrés

1.2.1 Calcul de Résistance

Il permet de déterminer toutes les dimensions d'une pièce, de telle façon que, en aucun point de sa structure, les sollicitations internes ne dépassent une certaine limite. Cette limite est définie par les caractéristiques mécaniques des matériaux obtenues lors des essais.

1.2.2 Calcul de Rigidité

La plupart des organes mécaniques doivent rester rigides. Sous l'influence des sollicitations extérieures, il convient le plus souvent que les déformations restent faibles et de toute façon dans le domaine élastique.

1.2.3 Calcul de Vérification

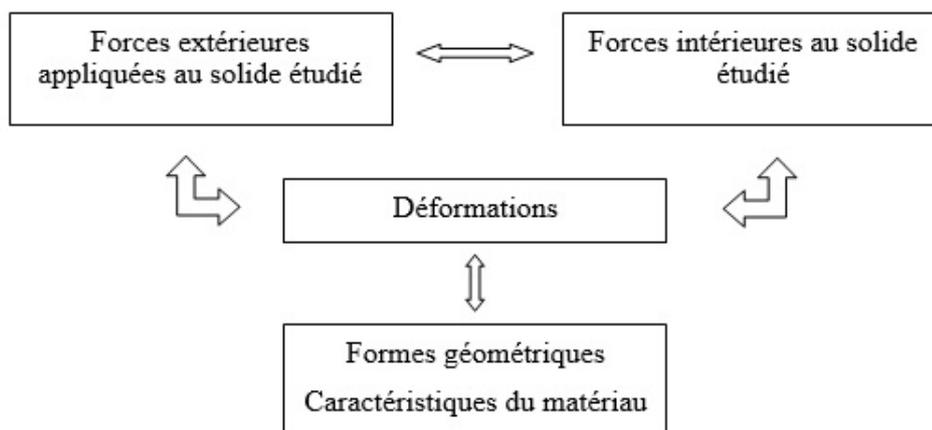
Lorsqu'on étudie une pièce mécanique, on doit au départ simplifier les formes de celles-ci et le plus souvent modéliser le système de forces extérieures (ou actions mécaniques) qui lui sont appliquées. La valeur de ces actions mécaniques sera recherchée en fonction des dimensions et du matériau de la pièce mais aussi en fonction de sa déformation admissible.

1.2.4 Choix du Matériaux

Le problème réciproque peut se poser : connaissant les dimensions d'une pièce (conditions restrictives d'encombrement ou de poids), le calcul de résistance permet alors le choix du matériau.

1.3 Les Moyens

Afin d'atteindre les objectifs qui se sont fixés, la résistance des matériaux doit établir des relations entre des paramètres de nature différente :



1.3.1 Principe Fondamental de la Statique

Le principe fondamental de la statique (PFS) s'applique en RdM afin de définir les actions mécaniques (AM) extérieures exercées sur un solide réel déformable. Nous verrons par la suite qu'il permet également de définir les efforts internes au solide après qu'une coupe fictive ait révélé ces efforts.

1.3.2 L'Expérimentation

Afin de définir une relation entre les déformations et les efforts appliqués, on fait appel à l'expérimentation. Les méthodes expérimentales permettent de caractériser le matériau : essai de traction, de compression, ...

De plus la suite ces résultats expérimentaux sont utilisés dans le valider les modèles théoriques.

1.3.3 Les modèles Théoriques

Les solides étudiés sont déformables. Leur étude précise est l'objet de la mécanique des milieux continus. Le comportement de milieux continus conduit à des modèles théoriques, solutions d'équations différentielles ou intégrales. Ces modèles nécessitent l'utilisation de techniques mathématiques et numériques puissantes mais complexes.

Basés sur des hypothèses simplificatrices réalistes, les modèles théoriques retenus en RdM seront beaucoup plus simples. Ils respecteront néanmoins les règles principales de la mécanique des milieux continus.

1.4 Les principaux Développement en RdM

- XVIème siècle : 1ers travaux expérimentaux sur les effets de la traction et de la flexion (Galilée).
- XVIIème siècle : Loi expérimentale fondamentale de la proportionnalité entre efforts et déformations (Hooke).
- XVIIIème siècle : Hypothèse des sections droites (Bernouilli). Théorie de la flexion (Coulomb), théorie du flambage (Euler).
- XIXème siècle : Théorie mathématique du milieu continu élastique (Navier, Lamé, Saint-Venant, Poisson).
- XXème siècle : Utilisation de techniques expérimentales plus précises (photoélasticimétrie, extensométrie, ...). Utilisation de techniques de calcul puissantes et étude de nouveaux matériaux (alliages légers, matières plastiques, matériaux composites).

Chapitre 2

Hypothèses de la RdM

2.1 Hypothèses sur le Matériau

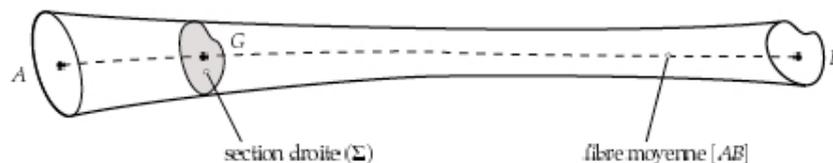
La matière est continue : les distances intermoléculaires sont toujours très petites devant les plus petites dimensions que nous aurons à utiliser.

La matière est homogène : cest à dire quelle a les mêmes propriétés en tous points. Cette hypothèse est tout à fait justifiée pour les matériaux métalliques usuels et les matières plastiques. Par contre, elle est déjà moins vraie pour les pièces ayant subies un traitement de surface et elle ne correspond plus qu'à une vue moyenne dans le cas des matériaux composites.

La matière est isotrope : les propriétés des matériaux sont les mêmes dans toutes les directions de l'espace. Comme précédemment cette hypothèse est tout à fait justifiée dans le cas de matériaux métalliques ou plastiques mais elle n'est plus vérifiée pour les matériaux composites ou pour le bois.

2.2 Hypothèse sur la Disposition de la Matière

Les solides étudiés en RdM, appelés **é Poutres** z sont de formes relativement simples : **Définition** : on appelle poutre, un solide continu, homogène, isotrope engendré par une surface plane (S) dont le centre de surface G décrit une courbe (C). Les caractéristiques de la poutre sont :



— Les dimensions de la section (S) peuvent être lentement variables,

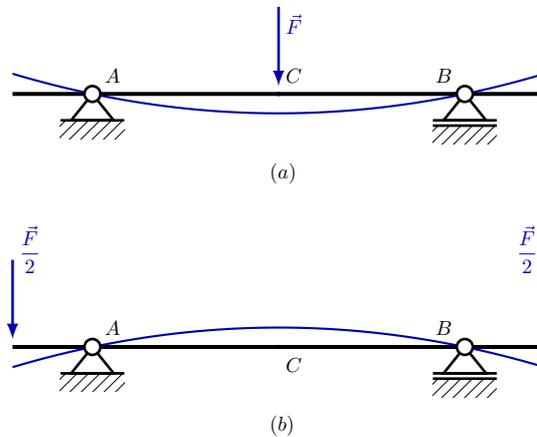
- (C) s'appelle ligne moyenne, (C) est une droite (cas général) ou une courbe de faible courbure,
- Le plan de (S) reste perpendiculaire à (C),
- Des points disposés de façon identiques sur les sections droites jouissent de certaines propriétés communes, on dit qu'ils appartiennent à des fibres,
- Les dimensions transversales sont très inférieures à la longueur de (C).

Remarque : nous nous intéresserons dans le cadre de ce cours à des poutres présentant au moins un plan de symétrie.

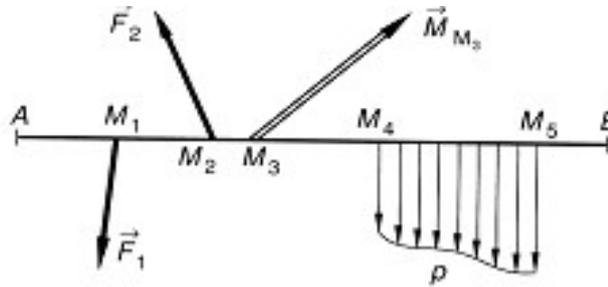
2.3 Hypothèses sur Actions Mécaniques Extérieures

- Plan de symétrie : les forces extérieures seront situées dans le plan de symétrie de la poutre ou alors disposées symétriquement par rapport à ce plan.
- Points d'application : pour un calcul de résistance ou de déformation, il n'est pas possible de remplacer un système de forces extérieures par un système équivalent.

Exemple : les systèmes de forces définis en (a) et (b) sont équivalents (du point de vue des réactions d'appuis calculées notamment) mais ne provoquent la même déformation.



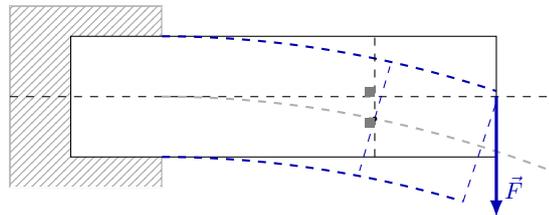
- Types d'actions mécaniques extérieures : un solide ne peut subir que deux types de sollicitations extérieures :
 - Des actions de contact qui se traduisent par des charges concentrées : (M_1, \vec{F}_1) , (M_2, \vec{F}_2) , ou moments (M_{M_3}, \vec{M}_3) ;
 - Des actions à distances (par exemple la pesanteur) qui agissent sur chaque partie du volume du solide : ce sont des charges réparties (sur par exemple) : elles sont définies par une densité linéique p exprimée en N/m.



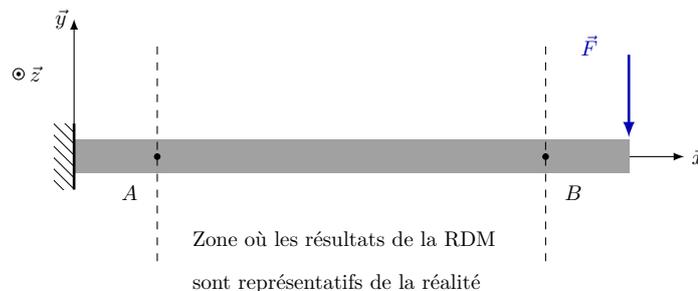
- Les déformations étant petites devant les dimensions de la poutre, les actions s'exerçant sur celle-ci seront calculées à partir du Principe Fondamental de la Statique (PFS) ou de la Dynamique du solide indéformable. De même, les points d'application des forces appliquées ne seront pas déplacés lors de la déformation de la poutre.

2.4 Hypothèses sur les Déformations

- Hypothèse de Navier et Bernoulli : les sections planes normales aux fibres avant déformation demeurent planes et normales aux fibres après déformation.



- Hypothèse de Barré de Saint Venant : les résultats obtenus en RdM ne s'appliquent qu'à une distance suffisamment éloignée de la région d'application des efforts concentrés. On considère généralement que les résultats de la RdM sont valables à une distance d'une charge concentrée environ égale à 2 fois une dimension caractéristique d'une section droite. Ainsi, on ne s'intéresse pas à la manière dont sont appliquées les actions mécaniques extérieures. Les deux problèmes ci-dessous sont donc considérés équivalents.



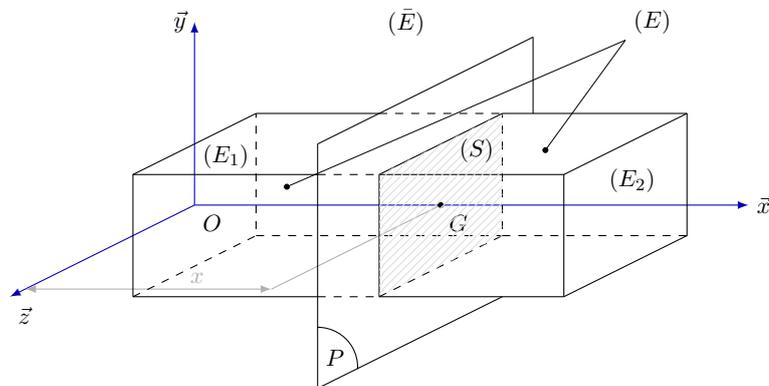
Remarque : cette restriction, très importante pour ce qui concerne la répartition locale des contraintes, na quun effet négligeable pour la détermination des déformation globales.

Chapitre 3

Torseur de cohésion

3.1 Définition de la Coupe Fictive

Soit E le solide assimilé à une poutre et \vec{E} l'ensemble extérieur à E . $R_0(0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ un repère lié à E tel que $(0, \vec{x}_0)$ soit confondu avec la ligne moyenne. Considérons un plan $P \perp (0, \vec{x}_0)$ et S la section droite de E ainsi définie. Soit G d'abscisse x , le centre de surface de S : dans $R_0(0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$, $\vec{OG} = x \vec{x}_0$ définit la position de la section droite fictive S . La coupure fictive par le plan P , partage la poutre E en deux tronçons E_1 et E_2 .



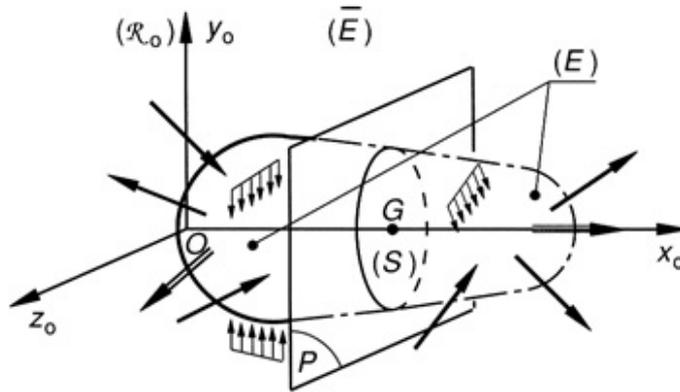
3.2 Définition du Torseur de Cohésion

Les actions mécaniques que le tronçon E_2 exerce sur E_1 à travers la section droite fictive S sont des efforts intérieurs à la poutre E . La répartition de ces efforts est a priori inconnue mais ils peuvent être modélisés par un torseur appelé torseur de cohésion dont les éléments de réduction au point G , centre de surface de S , sont donnés par :

$$\{\mathcal{T}_{\text{coh}}\}_G = \{\mathcal{T}_{E_2 \rightarrow E_1}\}_G = \begin{cases} \overrightarrow{R\{T\}} = R \\ \overrightarrow{M_G\{T\}} = M \end{cases}$$

3.3 Etude des Actions Mécaniques Extérieures à E

E est soumise de la part de \bar{E} à des actions mécaniques (AM) extérieures concentrées ou réparties.



Soit $\vec{R}(\bar{E} \rightarrow E)$ la résultante générale et $\vec{M}_G(\bar{E} \rightarrow E)$ le moment résultant au point G du torseur des actions mécaniques de \bar{E} sur E . E étant en équilibre, le PFS permet décrire : $T(\bar{E} \rightarrow E) = 0$ ce qui entraîne en G :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{R}(\bar{E} \rightarrow E) = \vec{0} \\ \vec{M}_g(\bar{E} \rightarrow E) = \vec{0} \end{array} \right\}_G$$

En utilisant la notion de coupe fictive, les AM de \bar{E} sur E peuvent être séparées en deux groupes :

— Le torseur des AM extérieures appliquées sur E_1 :

$$\{\tau(\bar{E} \rightarrow E_1)\}_G = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}(\bar{E} \rightarrow E_1) \\ \vec{M}_g(\bar{E} \rightarrow E_1) \end{array} \right\}_G$$

— Le torseur des AM extérieures appliquées sur E_2 :

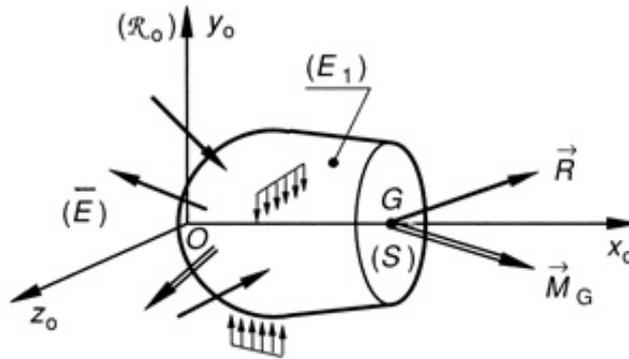
$$\{\tau(\bar{E} \rightarrow E_2)\} = \underset{G}{\left\{ \begin{array}{l} \vec{R}(\bar{E} \rightarrow E_2) \\ \vec{M}_g(\bar{E} \rightarrow E_2) \end{array} \right\}}$$

Les équations d'équilibre (1) de la poutre peuvent alors s'écrire :

$$\underset{G}{\left\{ \begin{array}{l} \vec{R}(\bar{E} \rightarrow E_1) + \vec{R}(\bar{E} \rightarrow E_2) = \vec{0} \\ \vec{M}_g(\bar{E} \rightarrow E_1) + \vec{M}_g(\bar{E} \rightarrow E_2) = \vec{0} \end{array} \right\}}$$

3.4 Relation Entre Torseur de Cohésion et Torseur des AM Extérieures à la Poutre

Isolons le tronçon E_1 :



Celui-ci est en équilibre sous l'action de 2 torseurs d'AM :

$$\{\tau(\bar{E} \rightarrow E_1)\} = \underset{G}{\left\{ \begin{array}{l} \vec{R}(\bar{E} \rightarrow E_1) \\ \vec{M}_g(\bar{E} \rightarrow E_1) \end{array} \right\}}$$

Le torseur des AM que E_2 exerce sur E_1 à travers la section droite fictive S :

$$\{\tau_{coh}\} = \underset{G}{\left\{ \begin{array}{l} \vec{R} \\ \vec{M}_g \end{array} \right\}}$$

Appliquons à E_1 le PFS $\{\tau(\bar{E} \rightarrow E_1)\} + \{\tau_{coh}\} = \{0\}$ soit :

$${}_G \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}(\bar{E} \rightarrow E_1) + \vec{R} = \vec{0} \\ \vec{M}_g(\bar{E} \rightarrow E_1) + \vec{M}_g = \vec{0} \end{array} \right\} \quad (3.1)$$

Compte tenu de (2) et (3), les éléments de réduction en G du torseur des efforts de cohésion peuvent donc s'exprimer de deux façons :

$${}_G \left\{ \begin{array}{l} \vec{R} = -\vec{R}(\bar{E} \rightarrow E_1) \\ \vec{M}_g = -\vec{M}_g(\bar{E} \rightarrow E_1) \end{array} \right\} \quad (3.2)$$

ou :

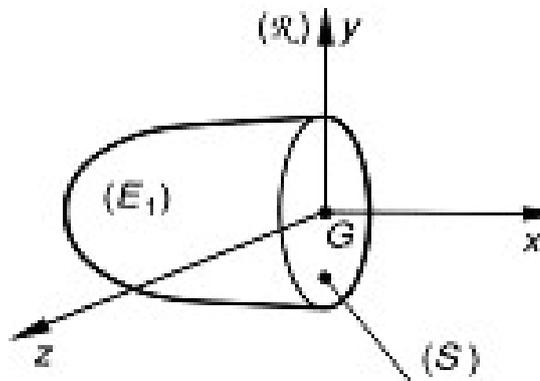
$${}_G \left\{ \begin{array}{l} \vec{R} = -\vec{R}(\bar{E} \rightarrow E_2) \\ \vec{M}_g = -\vec{M}_g(\bar{E} \rightarrow E_2) \end{array} \right\} \quad (3.3)$$

A retenir : $\{\mathcal{T}_{coh}\}_G = \{\tau(\bar{E} \rightarrow E_2)\} = -\{\tau(\bar{E} \rightarrow E_1)\}$

Remarques : dans le but de déterminer, dans une section droite donnée S repérée par l'abscisse x de son centre de surface, les composantes \vec{R} et \vec{M}_G du torseur de cohésion, nous utiliserons soit les relations (4), soit les relations (5); seul la simplicité des calculs guidera notre choix.

En déplaçant le point G tout au long de la ligne moyenne, on obtient l'évolution des efforts de cohésion dans la poutre.

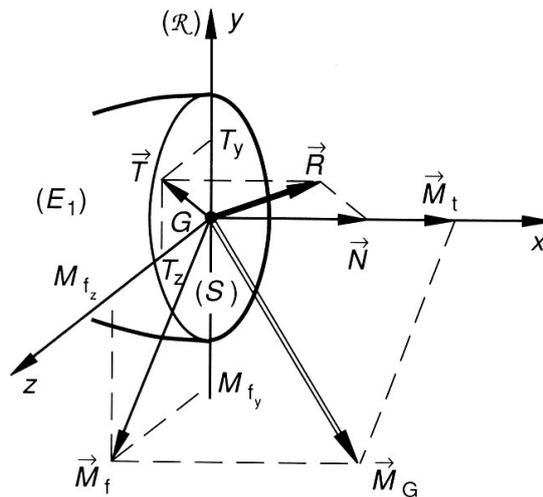
3.5 Repère de Définition des Sollicitations



Soit $R(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ le repère local lié à la section droite fictive S. Ce repère est tel que (G, \vec{x}) définissent la normale extérieure à S relativement au tronçon E_1 . Les axes (G, y, \vec{y}) et (G, y, \vec{z}) appartiennent alors au plan P de la section droite S dont ils sont généralement des axes de symétrie (ou axes principaux d'inertie). $R(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est appelé **repère de définition des sollicitations, il sera toujours direct**.

3.6 Domination des Composantes du Torseur de Cohésion

Dans le repère $R(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ défini ci-dessus, les relations (4) ou (5) permettent de connaître en G : $\{\tau_{coh}\} = \begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{M}_G \end{Bmatrix}$



Définitions :

Effort normal \vec{N} : projection de \vec{R} sur (G, \vec{x}) .

Effort tranchant \vec{T} : projection de \vec{R} sur le plan de la section droite S, plan défini par (G, \vec{y}, \vec{z}) .

Moment de torsion \vec{M}_t : projection de \vec{M}_G sur (G, \vec{x}) .

Moment de flexion \vec{M}_f : projection de \vec{M}_G sur le plan de la section droite (G, \vec{y}, \vec{z}) .

Par conséquent : $\vec{R} = \vec{N} + \vec{T}$ et $\vec{M}_G = \vec{M}_t + \vec{M}_f$

On définit également les projections de \vec{T} et de \vec{M}_f sur les axes (G, \vec{y}) et (G, \vec{z}) . Les composantes algébriques des éléments de réduction du torseur

de cohésion sont :

Définitions :

N : composante algébrique de leffort normal \vec{N} sur (G, \vec{x})

T_y : composante algébrique de leffort tranchant \vec{T} sur (G, \vec{y})

T_z : composante algébrique de leffort tranchant \vec{T} sur (G, \vec{z})

M_t : composante algébrique du moment de torsion \vec{M}_t sur (G, \vec{x})

M_{f_v} : composante algébrique du moment de torsion \vec{M}_f sur (G, \vec{y})

M_{f_z} : composante algébrique du moment de torsion \vec{M}_f sur (G, \vec{z})

Soit dans $R(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$:

$$\vec{R} = N \cdot \vec{x} + T_y \cdot \vec{y} + T_z \cdot \vec{z} \text{ et } \vec{M}_G = M_t \cdot \vec{x} + M_{f_v} \cdot \vec{y} + M_{f_z} \cdot \vec{z}$$

Remarque : Les éléments de réduction au point G du torseur des efforts de cohésion sont calculés à partir des équations d'équilibre de E en utilisant (4) ou (5). Ces éléments sont exprimés dans $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$, on a donc tout intérêt à choisir pour l'étude de l'équilibre de la poutre E , un repère $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ parallèle au repère $R(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ lié à S.

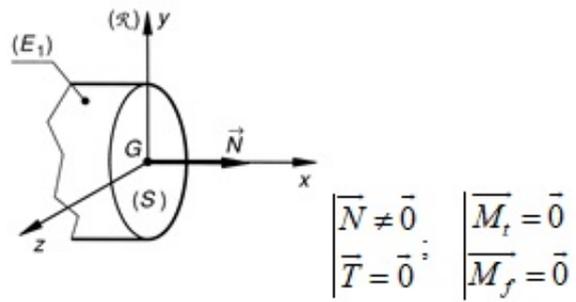
3.7 Diagrammes

Les composantes algébriques $N, T_y, T_z, M_t, M_{f_v}, M_{f_z}$ varient en fonction de la position x du centre de surface G de la section droite fictive S. La représentation graphique des fonctions : $N(x), T_y(x), T_z(x), M_t(x), M_{f_v}(x), M_{f_z}(x)$ donne les diagrammes des composantes des éléments de réductions en G du torseur des efforts de cohésion. Ces fonctions peuvent présenter des discontinuités, par exemple lorsque le plan P de S rencontre le point d'application d'une charge concentrée ou un moment localisé.

3.8 Définitions des Sollicitations

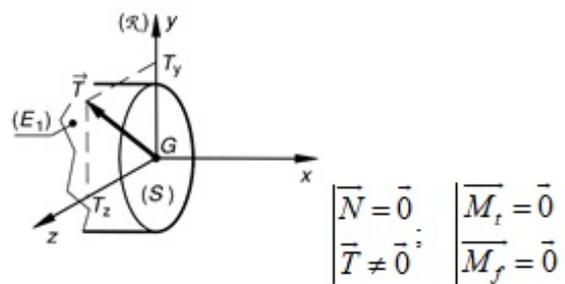
Si les éléments de réduction en G du torseur des efforts de cohésion font apparaître un seul des quatre éléments $\vec{N}, \vec{T}, \vec{M}_t, \vec{M}_f$ non nul, **la sollicitation est dite simple**. Tout autre cas que les cinq définis ci-dessus définira une **sollicitation composée**.

Traction ou compression simple

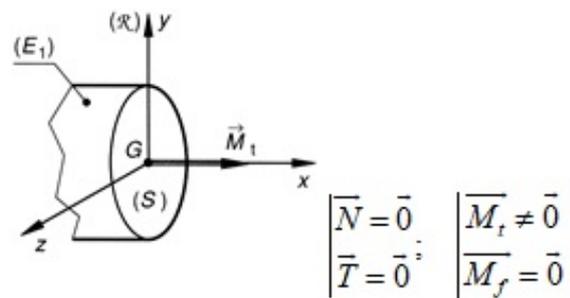


Si $N > 0$: extension ; Si $N < 0$: compression

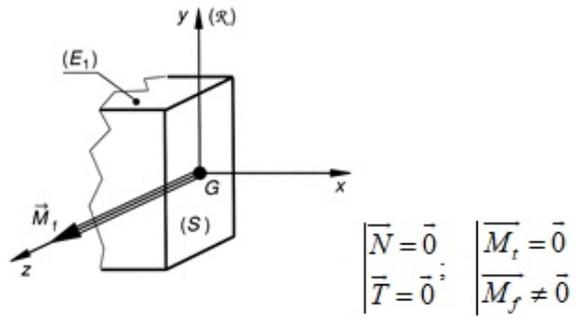
Cisaillement simple



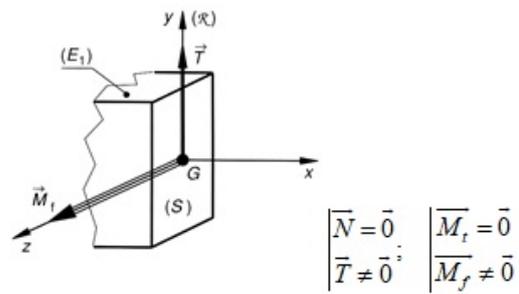
Torsion simple



Flexion plane simple



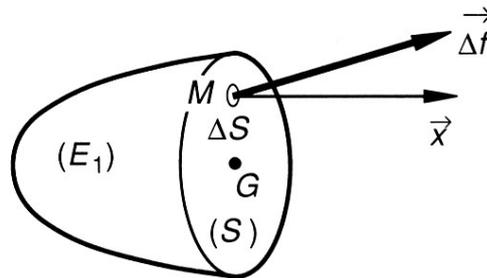
Remarque : ce dernier cas de la flexion plane simple se rencontrant rarement, on conviendra de donner le nom de flexion plane simple au cas très courant défini par la figure ci-dessous. Le cas précédent sera ainsi appelé flexion pure.



Chapitre 4

Notion de Contrainte

La connaissance du torseur de cohésion en tous points de la ligne moyenne ne permet pas de conclure par rapport au dimensionnement d'une poutre puisque ce torseur constitue une grandeur globale définie au centre de surface d'une section droite. Il est donc nécessaire d'étudier, dans cette section droite, les grandeurs locales. En effet, les efforts de cohésion se répartissent en tous points de la section droite S suivant une loi à priori inconnue. Notons $\vec{\Delta f}$ l'action mécanique au point M et ΔS l'élément de surface autour de ce point. Soit la normale extérieure en M .



On appelle vecteur contrainte au point M relativement à l'élément de surface ΔS orienté par sa normale extérieure \vec{x} , le vecteur noté $\vec{T}(M, \vec{x})$ tel que :

$$\vec{T}(M, \vec{x}) = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\vec{\Delta f}}{\Delta S} = \frac{d\vec{f}}{dS} \quad (4.1)$$

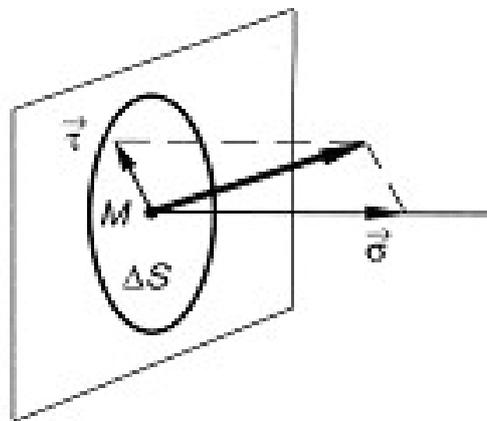
La contrainte est une grandeur vectorielle, elle est définie en un point pour une section donnée. Ce vecteur a sa propre direction. On le décompose alors en deux composantes.

Définition :

- On appelle contrainte normale $\vec{\sigma}$, la projection de $\vec{\sigma}(M, \vec{x})$ sur la normale \vec{x} .

- On appelle contrainte tangentielle $\vec{\tau}$, la projection de $\vec{\sigma}(M, \vec{x})$ sur le plan de l'élément de surface ΔS .

$$\vec{T}(M, \vec{x}) = \vec{\sigma} + \vec{\tau}$$

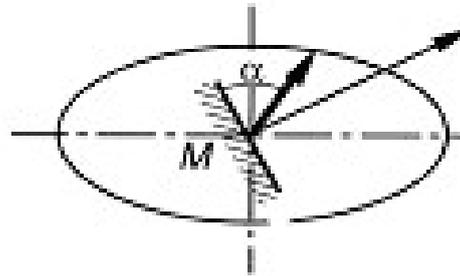


D'après (4.1), nous pouvons dire que la dimension d'une contrainte est celle du rapport d'une force par une surface. Elle s'exprime donc en N/m^2 (ou Pascal).

On utilise fréquemment certains multiples du pascal :

- le mégapascal ou MPa : $1MPa = 10^6 Pa = 1N/mm^2$ (le plus utilisé)
- le gigapascal ou $GPa = 10^9 Pa$
- le bar : $1 \text{ bar} = 10^5 Pa$

Remarque : la contrainte est homogène à une pression ; toutefois, alors que la pression au sein d'un fluide est une grandeur scalaire, il n'en va pas de même pour la contrainte en un point d'un matériau. La théorie de l'élasticité montre que la contrainte dépend de l'orientation du plan de la coupure, donc de la direction de \vec{x} . L'ensemble des extrémités du vecteur contrainte quand \vec{x} varie est une ellipsoïde (appelée ellipsoïde de Lamé). Dans le cas particulier d'un système de forces pouvant se ramener à un système coplanaire, cet ensemble est une ellipse. Ce problème général, assez difficile à analyser explique pourquoi au cours de notre étude nous nous limiterons à des directions de coupure privilégiées lorsqu'il faudra calculer des contraintes.



Chapitre 5

Etude des sollicitations simples

5.1 Traction Pure - Compression Pure

5.1.1 Définitions

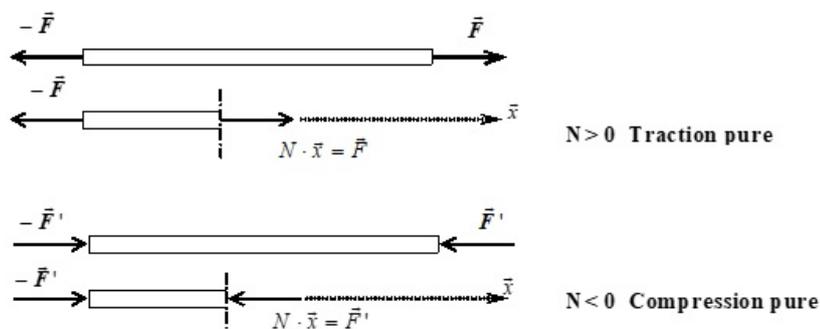
Une poutre est soumise à une sollicitation de traction pure ou de compression pure si la seule composante non nulle du tenseur de cohésion au centre de surface G d'une section droite est leffort normal N .

$$\{\mathcal{T}_{\text{coh}}\}_G = \begin{Bmatrix} N & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

La seule géométrie permettant d'obtenir ce tenseur de cohésion *en tout point de la ligne moyenne* est celle d'une poutre rectiligne.

Le signe de leffort normal N détermine si la sollicitation est une traction pure ou une compression pure.

Illustration :



5.1.2 Contraintes

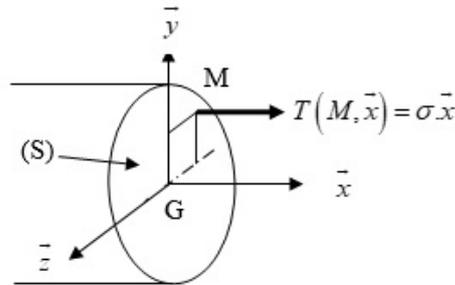
Leffort normal N génère un vecteur contrainte uniforme sur une section droite et possède seulement une composante normale. La composante tangentielle est nulle.

Dans une section droite (S) donnée, $\vec{T}(M, \vec{x}) = \sigma \vec{x}$ avec $\sigma = cste \forall M \in (S)$

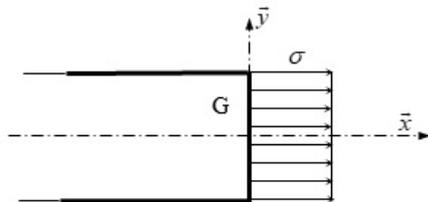
On peut donc déterminer la relation entre leffort normal et la contrainte normale :

$$\int \int_S \vec{T}(M, \vec{x}) ds = N \vec{x} \text{ et } \int \int_S \sigma \vec{x} ds = \left\{ \sigma \left[\int \int_S ds \right] \vec{x} = \sigma S \vec{x} \right\}$$

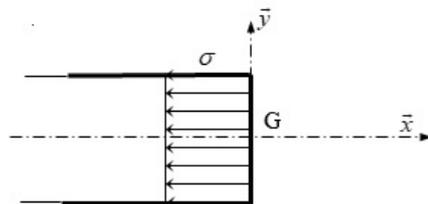
$$\Rightarrow \sigma = \frac{N}{S}$$



$N > 0 \Rightarrow \sigma > 0 \Rightarrow$ Traction



$N < 0 \Rightarrow \sigma < 0 \Rightarrow$ Compression

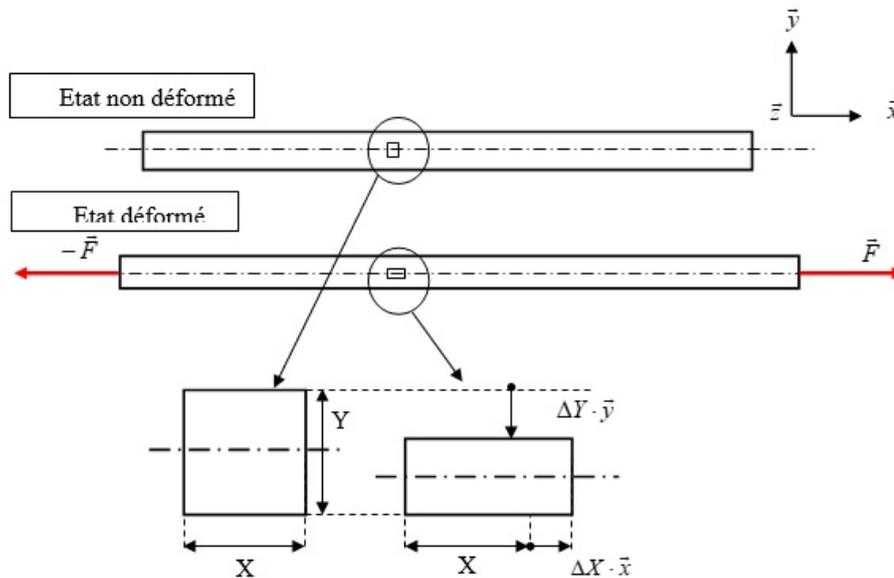


5.1.3 Déformations

Prenons le cas d'une poutre sollicitée en traction simple. Sous leffet du chargement, la longueur de la poutre augmente et les dimensions de la section diminuent. Cette réduction des dimensions transversales est appelée effet

poisson ν . L'importance de ce phénomène est caractérisée par le coefficient de poisson ν . Ce coefficient est compris entre 0.2 et 0.5 selon les matériaux. Pour les aciers il est de 0.3. Lorsque $\nu = 0.5$, le matériau ne change pas de volume au cours de la déformation. C'est le cas notamment du caoutchouc.

Considérons un volume élémentaire parallélépipédique quelconque de la poutre, de dimensions X , Y et Z suivant les trois axes \vec{x} , \vec{y} , \vec{z} . Les variations de ces dimensions sont notées : Δx \vec{x} , Δy \vec{y} , Δz \vec{z} .



On définit les allongements unitaires ou dilatation linéaire suivant les trois axes par :

$$\epsilon_x = \frac{\Delta X}{X}, \epsilon_y = \frac{\Delta Y}{Y} \text{ et } \epsilon_z = \frac{\Delta Z}{Z}$$

L'effet Poisson se traduit par : $\epsilon_y = \epsilon_z = -\nu \cdot \epsilon_x$

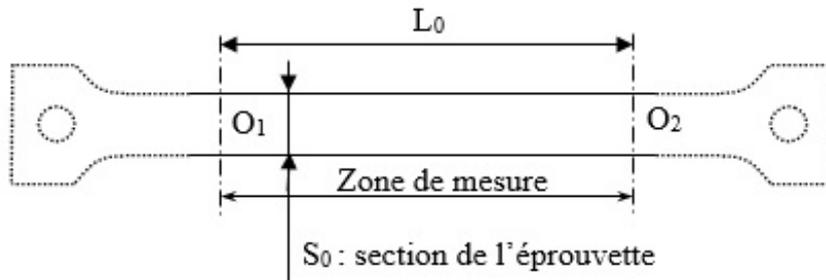
5.1.4 Essai de Traction

L'essai de traction est l'essai fondamental de caractérisation des propriétés mécaniques des matériaux utilisés en construction mécanique. Il consiste à imposer un allongement ΔL à une éprouvette et à mesurer l'effort de traction F correspondant. Le déplacement est appliqué progressivement de façon croissante jusqu'à la rupture de l'éprouvette. La vitesse de chargement est en général contrôlée.

Eprouvette d'Essai

Les conditions à respecter sont qualitativement les suivantes :

- Les têtes de l'éprouvette sont d'une section supérieure à la section S_0 de la partie centrale de l'éprouvette. Ainsi les phénomènes caractérisant le comportement du matériau se produiront dans cette partie centrale O_1O_2 de longueur L_0 .



- La partie centrale (zone de mesure), de section S_0 , est reliée aux têtes par une zone intermédiaire dans laquelle la section varie progressivement.
- La partie centrale est allongée. On peut ainsi faire l'hypothèse que dans la zone de mesure la déformation est uniforme. En conséquence, les faces planes de deux sections successives restent planes et parallèles entre-elles. Le matériau étant homogène, l'effort de traction se répartit uniformément dans une section donnée.

Analyse de la Courbe Enregistré

Le résultat de l'essai de traction se présente sous la forme d'une courbe avec en abscisse l'allongement ΔL de la zone de mesure de longueur initiale L_0 et en ordonnée la force de traction F correspondant à cet allongement (voir courbe ci-dessous). On peut transposer cette courbe Force=f(Allongement) en une courbe Contrainte=f(Déformation) par les formules suivantes :

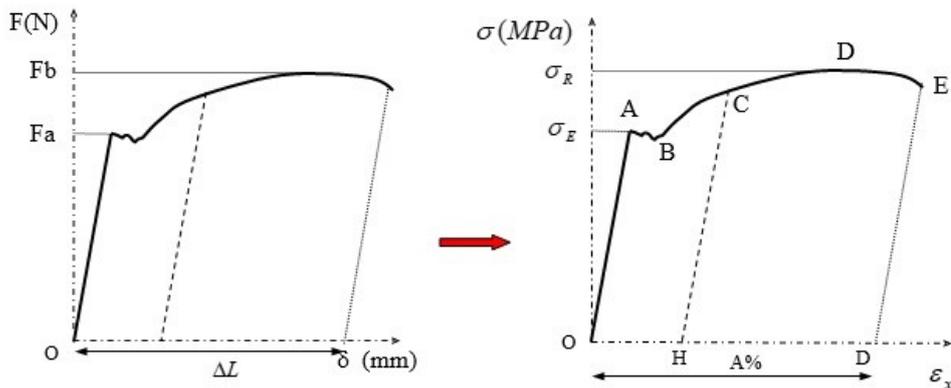
$$\sigma = \frac{N}{S_0} = \frac{F}{S_0} \text{ et } \epsilon_x = \frac{\Delta L}{L_0}$$

Cas d'un matériau ductile Les matériaux ductiles sont les matériaux pour lesquels le diagramme de l'essai de traction comporte les différentes zones décrites ci-dessous. On distingue deux grandes familles de matériaux :

- les matériaux pour lesquels la déformation est peu dépendante du temps, donc de la vitesse de traction : l'acier, l'aluminium, le cuivre ainsi que leurs alliages.

- les matériaux dont le comportement évolue significativement au cours du temps et qui sont sensibles à la vitesse de sollicitation : les polymères thermoplastiques principalement.

Nous nous intéressons ci-dessous uniquement à la première catégorie de matériaux, cest à dire au comportement des alliages métalliques rencontrés en construction mécanique.



Sur la courbe $\sigma = f(\epsilon_x)$, on peut observer plusieurs domaines : **Partie 0A** : Domaine élastique linéaire Au déchargement, la courbe force-déplacement (ou contrainte-déformation) se superpose exactement à celle enregistrée lors du chargement. Totalement déchargée, l'éprouvette retrouve son état initial. Cest cette réversibilité de la déformation qui caractérise le domaine élastique. De plus, pour de nombreux matériaux, notamment pour les alliages métalliques auxquels nous nous intéressons, la déformation augmente linéairement avec la contrainte, on parle alors de domaine élastique linéaire :

$$\sigma = \frac{F}{S_0} = E \frac{L - L_0}{L_0} = E \frac{\Delta L}{L_0} = E \epsilon_x$$

où E, coefficient de proportionnalité entre déformation et contrainte, est appelé le module d'Young ou le module d'élasticité longitudinal du matériau. Il se mesure en MPa ou en GPa. Cette loi de dévolution linéaire de la contrainte en fonction de la déformation est appelée **loi de Hooke**.

Le point A marque la fin de ce domaine.

$\sigma_e = \frac{F_A}{S_0}$ est appelée limite élastique du matériau, on la note parfois R_e .

La limite de cette zone et la position précise du point A sont parfois difficiles à déterminer. Aussi, on utilise souvent la contrainte $R_{e0.2}$, contrainte pour laquelle la déformation résiduelle est de 0.2% après suppression de tout

effort. La plupart des pièces mécaniques sont dimensionnées de façon à travailler dans le domaine élastique.

Partie AE : Domaine de déformation permanente

Dans ce domaine, une suppression de l'effort de traction, en C par exemple, conduit à une décharge selon CH, parallèle à OA. La déformation OH, éprouvette non chargée, est alors la déformation permanente ou résiduelle. Ce phénomène est appelé plastification du matériau.

Pour certains matériaux, la courbe expérimentale présente un palier AB caractérisé par un accroissement de la déformation sans augmentation notable de la contrainte appliquée. On parle alors de comportement plastique parfait.

De B à D, on constate à nouveau une augmentation de la contrainte en fonction de l'allongement de l'éprouvette, on parle alors de durcissement du matériau. La contrainte maximale admissible par le matériau, obtenue en D, est notée R_m ou σ_R .

A partir du point D, on observe un rétrécissement progressif d'une section de l'éprouvette : c'est le phénomène de striction. A effort de traction F constant, la contrainte $\sigma = \frac{F}{S}$ augmente (S diminue par rapport à S_0), cet état instable conduit à la rupture de l'éprouvette en E.



Juste avant la rupture, la déformation de l'éprouvette ϵ_T est la somme d'une déformation élastique ϵ_e et d'une déformation permanente ϵ_p :

$$\epsilon_T = \epsilon_e + \epsilon_p$$

On définit le pourcentage d'allongement permanent à la rupture du matériau :

$$A\% = 100 \cdot \epsilon_p = 100 \cdot (\epsilon_T - \epsilon_e)$$

Cas d'un matériau fragile On qualifie de fragile les matériaux pour lesquels le diagramme de traction ne présente pas de zone plastique. Pour ces matériaux la rupture se produit alors que la déformation est encore élastique.

	E(GPa)	ν	R_e (MPa)	R_m (MPa)	ρ kg/m ³	A %
Aciers ordinaires	210	0,3	200 à 400	400 à 800	7850	20 à 50
Aciers spéciaux	210	0,3	700 à 2000	1000 à 2000	7850	3 à 20
Fontes grises : Traction Compression	100	0,25	70	150 à 500 570 à 1300	7200	0 à 1
Fontes blanches	180	0,29	12	50	7600	0 à 1
Aluminium pur laminé recuit	65	0,33	50	80	2700	30
Cuivre pur recuit	120	0,35	44 à 60	240	2930	50
Laiton (33% Zn) laminé recuit	105	0,34	10	32	8350	
Bronze (10% Zn) coulé brut	90	0,3	12	25	8800	
Zinc laminé à chaud recuit	85	0,25	6	12	7100	
Plomb laminé ou extrudé	17	0,45	1	1,5	11350	
Titane : laminé recuit	110	0,25	770 430	980 530	4500	10 25

On peut citer :

- les aciers bruts de trempe, le verre, la fonte grise, les céramiques... pour lesquels la rupture intervient indépendamment de la vitesse de déformation.
- le béton et la plupart des polymères thermodurcissables qui sont quant à eux sensibles à la vitesse de déformation.

Il faut noter que beaucoup de ces matériaux présentent une différence de comportement très marquée en traction et en compression.

Paramètre influant de l'essai Certaines conditions peuvent influencer de façon plus ou moins notable les résultats de lessai de traction :

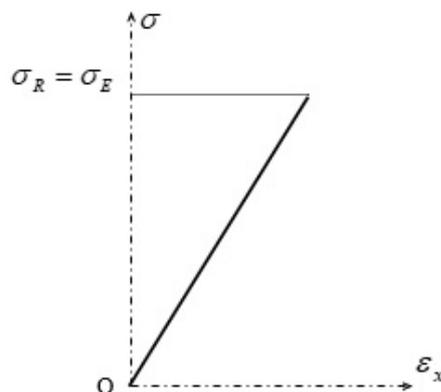
La vitesse de mise en charge : la vitesse de traction normalisée est de 0.1 mm/s. La vitesse de mise en charge augmente dans des limites faibles les caractéristiques des métaux. D'une façon générale, la vitesse accroît les caractéristiques (le module d'Young et les différentes limites de résistance). Les matériaux pour lesquels cette influence est très forte sont viscoélastiques ou/et viscoplastiques.

La température : la température n'influence pas de façon notable les caractéristiques élastiques des métaux si elle reste inférieure aux valeurs où elle va modifier leur structure cristalline ($\cong 500^{\circ}\text{C}$ pour les aciers courants).

Les effets de sollicitations antérieures : pour les métaux, le fait d'avoir, antérieurement à l'essai, dépassé la limite élastique engendre une déformation permanente. Il en résulte une augmentation de la limite d'élasticité. C'est le phénomène de durcissement utilisé industriellement.

Quelques caractéristiques Mécaniques

Métaux et alliages métalliques :



Matériaux solides non métalliques :

	E (GPa)	ν	σ_{RT} (MPa)	σ_{RC} (MPa)	ρ kg/m ³
Chêne sec	11.5	0,45	90	50	2300
Granit	55	0,2	15	180	2700
Béton de ciment à haute résistance	40	0,18	4	60	2300
Verre	60	0,22	60	450	2500
Caoutchouc	0.05	0,5	50		1200
Bakélite	1	0,37	35		920
Plexiglas	3	0,36	60		1180
Araldite (résine époxy)	3	0,4	70	900	1200

Avec :

- ρ : masse volumique ;
- σ_{RT} : contrainte de rupture en traction ;
- σ_{RC} : contrainte de rupture en compression ;
- $A\%$: allongement de rupture (en %)

5.1.5 Conditions de Résistance

Coefficient de Sécurité

Par définition une structure est calculée avec un coefficient de sécurité k si les valeurs maximales des forces extérieures appliquées à cette structure sont telles qu'en les multipliant par k , on atteint la situation critique de ruine (mise hors service de la pièce).

En principe, ce coefficient de sécurité devrait être déterminé expérimentalement. Ceci est trop onéreux. Aussi, en RdM, le coefficient est affecté sur les contraintes : une pièce présente un coefficient de sécurité k vis à vis de la ruine si les valeurs des contraintes maximales en service, multipliées par k , atteignent les valeurs caractérisant l'état de ruine ou aussi l'état limite du matériau.

On définit ainsi la notion de contrainte admissible σ_{adm} , on parle aussi de résistance pratique notée R_p :

Matériaux fragiles : R_p (ou σ_{adm}) est définie à partir de R_m , soit $R_p = \frac{R_m}{k}$

Matériaux ductiles : ils peuvent très largement dépasser la zone élastique avant que la limite de résistance soit atteinte, R_p est donc déterminée à partir de $R_{e0.2}$, soit $R_p = \frac{R_{e0.2}}{k}$ La valeur de S est choisie en fonction de la nature de la sollicitation, de l'importance de la pièce, des dangers particuliers liés à sa ruine, des normes en vigueur.

Il tient compte d'un certain nombre d'incertitudes : incertitudes relatives à la composition réelle du matériau, à ses propriétés mécaniques, aux écarts entre le modèle poutre et la pièce réelle.

En construction mécanique, on utilise généralement des coefficients de sécurité compris environ entre 1,2 et 5.

Critère de Résistance

Cela consiste à borner la valeur de la contrainte normale maximale régnant dans la poutre étudiée par la résistance pratique R_p .

$$\sigma_{max} \prec R_p$$

5.1.6 Problèmes réels de la Traction

Le problème réel diffère souvent du modèle théorique et se posent souvent les problèmes suivants :

- Ignorance du champ de contrainte réel au voisinage de l'application des charges (principe de BARRE DE Saint VENANT) \Rightarrow Nécessité de renforcer la pièce.
- Phénomène de concentration de contrainte.

Dans les zones de variation brusque de section, les hypothèses de la RDM ne sont plus vérifiées.

Au voisinage de ces changements de forme, le champ de contrainte est totalement différent de celui qui existe dans les parties adjacentes.

On constate généralement une augmentation de la valeur des contraintes, d'où le nom de **concentration de contrainte**.

Pour un certain nombre de ces accidents de forme \hat{z} , le calcul (théorie de l'élasticité), ou l'expérience, ont permis de déterminer le champ de contrainte réel ou tout au moins les contraintes maximales.

On a ainsi pu mettre en évidence un coefficient de concentration de contrainte $K = \frac{\sigma_{max}}{\sigma}$, fonction de la géométrie de l'accident de forme.

5.2 Flexion Plane : Flexion Pure - Flexion Simple

5.2.1 Définitions

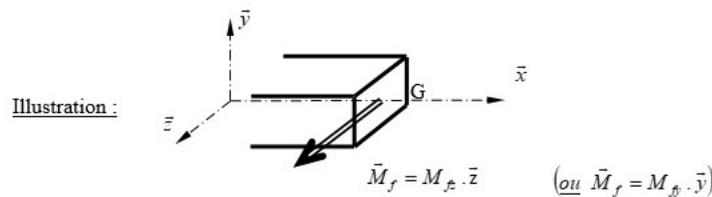
Flexion Plane

Une poutre est soumise à une sollicitation plane \hat{z} si le système des actions mécaniques extérieures exercées sur la poutre peut se réduire à un système coplanaire (résultantes dans le plan et moments orthogonaux au plan) dont le plan est confondu avec un plan de symétrie de la poutre. Dans le cas d'une flexion plane, la poutre se fléchit donc dans le plan \hat{z} . Dans le cas contraire, on parle de flexion déviée.

Flexion Pure

Une poutre est soumise à une sollicitation de flexion pure si la flexion est plane et si la seule composante non nulle du torseur de cohésion au centre de surface G d'une section droite est le moment de flexion suivant l'axe \vec{y} ou \vec{z} .

$$\{\mathcal{T}_{coh}\}_G = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & Mf_z \end{Bmatrix}_{(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} \quad \text{OU} \quad \{\mathcal{T}_{coh}\}_G = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Mf_y \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$



Flexion Simple

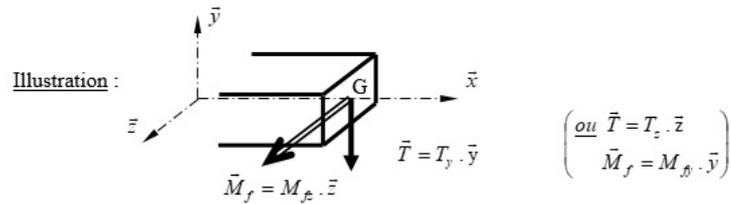
Une poutre est soumise à une sollicitation de flexion simple si la flexion est plane et si les seules composantes non nulles du torseur de cohésion au centre de surface G d'une section droite sont soit :

- leffort tranchant sur et le moment de flexion suivant \vec{z}

$$\{\mathcal{T}_{\text{coh}}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ T_y & 0 \\ 0 & Mf_z \end{Bmatrix}_{(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

— leffort tranchant sur \vec{z} et le moment de flexion suivant \vec{y}

$$\{\mathcal{T}_{\text{coh}}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Mf_y \\ T_z & 0 \end{Bmatrix}_{(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$



5.2.2 Propriétés

Pour tout tronçon de poutre non soumis à une action mécanique ponctuelle (ou concentrée), on démontre :

$$\frac{dT_y}{dx} = -p(x) \text{ et } \frac{dM_{fz}}{dx} = -T_y$$

$p(x)$: charge linéique sur le tronçon (en l'absence de charge $p(x) = 0$)

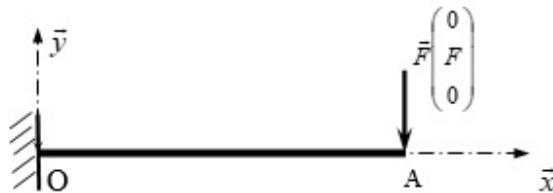
Conséquence : pour la sollicitation de flexion pure : $T_y = 0 \Rightarrow M_{fz} = \text{cste}$

5.2.3 Exercices

Exercice n1

Poutre rectiligne $OA = l$ encastree en A, de section droite constante soumise à une charge concentrée en O

(\vec{y}, \vec{z}) sont les axes de symétrie de toute section droite de la poutre.



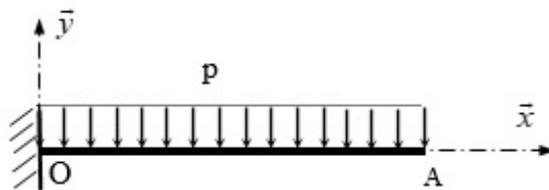
Questions :

- a) Déterminer le torseur de cohésion sur OA
- b) Tracer les diagrammes deffort
- c) Déterminer l'expression des contraintes normales $\sigma_{x_{maxi}}$.
- d) Déterminer l'expression de la déformée.
- e) Déterminer l'expression de la flèche maximale.

Exercice n°2

Poutre rectiligne OA = l encastrée en A, de section droite constante soumise à une charge linéique uniforme p

(\vec{y}, \vec{z}) sont les axes de symétrie de toute section droite de la poutre.



Questions :

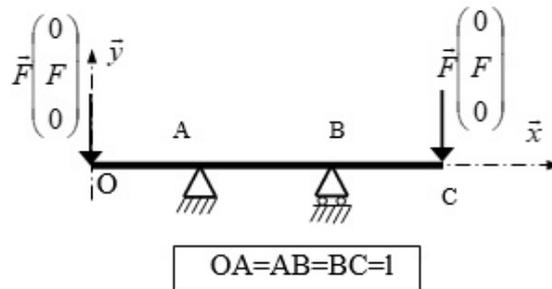
- a) Déterminer le torseur de cohésion sur OA
- b) Tracer les diagrammes deffort
- c) Déterminer l'expression des contraintes normales $\sigma_{x_{maxi}}$.
- d) Déterminer l'expression de la déformée.
- e) Déterminer l'expression de la flèche maximale.

Exercice n°3

Poutre rectiligne OC = 3l de section droite constante soumise à deux charges concentrées

Appui avec frottement en A et sans frottement en B.

(\vec{y}, \vec{z}) sont les axes de symétrie de toute section droite de la poutre.



Questions :

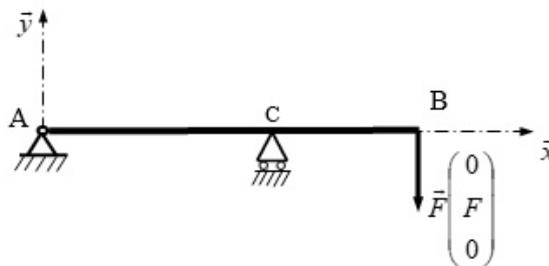
- a) Déterminer les réactions d'appui en A et B.
- b) Déterminer le torseur de cohésion sur OA, AB et BC.
- c) Tracer les diagrammes deffort et en déduire le type de sollicitation sur chacun des tronçons.
- d) Déterminer l'expression des contraintes normales $\sigma_{x_{maxi}}$.
- e) Déterminer l'expression de la déformée.
- f) Déterminer l'expression de la flèche maximale.

Exercice n°4

Poutre rectiligne AC , articulée en A , en appui simple sans frottement en C , charge \vec{F} en B .

(\vec{y}, \vec{z}) axes de symétrie de toute section droite.

AC = a , CB = b .



Questions :

- a) Déterminer les réactions d'appui en A et B.
- b) Le torseur de cohésion sur AC et CB
- c) Tracer les diagrammes deffort
- d) Déterminer l'expression des contraintes normales $\sigma_{x_{maxi}}$.
- e) Déterminer l'expression de la déformée.

- f) Dans le cas particulier $a = b$, déterminer l'expression de la flèche maximale.

5.2.4 Contraintes

5.2.5 Analyse des composantes du vecteur contrainte

En flexion pure : le moment de flexion M_{fz} génère un champ de contrainte normale.

En flexion simple : L'effort tranchant T_y génère un champ de contrainte tangentielle.

$$\iint_{(S)} \vec{T}(M, \vec{x}) \cdot d\vec{s} = T_y \cdot \vec{y} \text{ or } \vec{T}(M, \vec{x}) = \sigma \cdot \vec{x} + \tau \cdot \vec{y} \Rightarrow \iint_{(S)} \tau \cdot d\vec{s} = T_y$$

Le moment de flexion M_{fz} génère un champ de contrainte normale.

Dans le cas de poutre élancée (longueur supérieure à environ dix fois une dimension caractéristique de la section), les contraintes tangentielles dues à l'effort tranchant sont négligeables par rapport aux contraintes normales dues au moment de flexion. Il en est de même pour les déformations dues à ces deux composantes.

Dans le cadre des poutres élancées, on dira donc que l'on néglige l'effet de l'effort tranchant.

Nous allons donc par la suite étudier seulement les contraintes et déformations normales dues au moment de flexion.

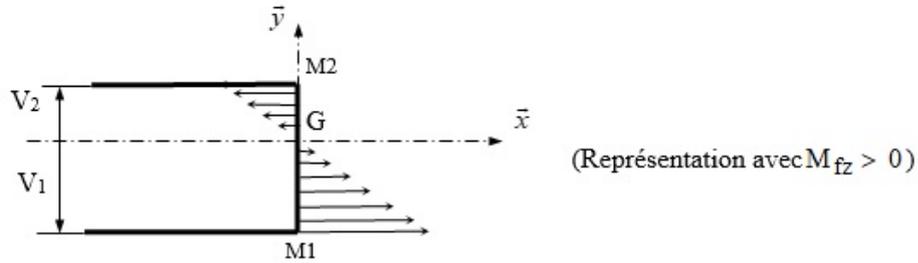
5.2.6 Etude la répartition des contraintes normales dues au moment fléchissant

En un point M tel que $\vec{GM} = y \cdot \vec{y} + z \cdot \vec{z}$, la contrainte normale se exprime par :

$$\sigma = -\frac{M_{fz}}{I_{(G, \vec{z})}} \cdot y \text{ dans le cas où } M_{fz} \neq 0 \text{ et } M_{fy} = 0$$

$$\sigma = \frac{M_{fy}}{I_{(G, \vec{y})}} \cdot z \text{ dans le cas où } M_{fy} \neq 0 \text{ et } M_{fz} = 0$$

Avec $I_{(G, \vec{y})}$ et $I_{(G, \vec{z})}$ moments quadratiques de la section par rapport aux axes (G, \vec{y}) (G, \vec{z}) (cf chapitre 4 Etude des sections droites \hat{z}).
Doù, dans une section droite donnée, une répartition linéaire de σ .
Plaçons nous dans le cas d'un moment de flexion suivant l'axe \vec{z}



Remarque : pour $y = 0 \Rightarrow \sigma = 0 \Rightarrow$ pas de sollicitation (plan neutre).

$$\text{En } M_1 : y = V_1 \sigma = -\frac{M_{fz}}{I_{(G, \vec{z})}} \cdot y_1 = -\frac{M_{fz}}{I_{(G, \vec{z})}/V_1} \text{ (valeur maximum en traction)}$$

$$\text{En } M_2 : y = V_2 \sigma = -\frac{M_{fz}}{I_{(G, \vec{z})}} \cdot y_2 = -\frac{M_{fz}}{I_{(G, \vec{z})}/V_2} \text{ (valeur maximum en compression)}$$

Le terme $I_{(G, \vec{z})}/V$ est nommé rigidité de flexion \dot{z}

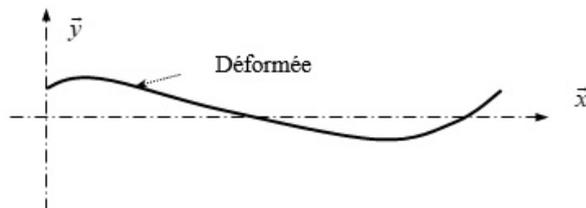
Pour une sollicitation donnée (M_{fz} fixé), les contraintes extrêmes seront d'autant plus faibles que le terme $I_{(G, \vec{z})}/V$ sera grand. D'où une recherche de répartition de la matière dans la section droite favorisant une valeur élevée du terme $I_{(G, \vec{z})}/V$.

5.2.7 Déformations

Définitions

Comme nous l'avons vu précédemment, l'ensemble des points G, centre de surface des diverses sections droites constitue l'axe \dot{z} de la poutre ou la ligne moyenne \dot{z} .

Dans le cas d'une poutre droite, avant sollicitation, cette ligne moyenne est rectiligne (axe \vec{x}). Lors de la sollicitation, les différents points G se déplacent et constituent alors une ligne moyenne déformée définie par son équation $Y = f(x)$.

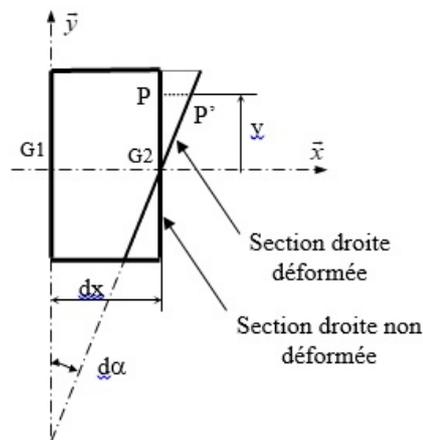


L'équation $Y = f(x)$ constitue l'équation de la ligne moyenne déformée.

Equation de la ligne moyenne déformée : exploitation de l'hypothèse de Bernoulli

Rappel de l'hypothèse : Les sections planes normales à ligne moyenne dans l'état non déformé restent planes et normales à la ligne moyenne dans l'état déformé.

Analysons le déplacement relatif de deux sections droites voisines (cas $M_{fz} \neq 0$ et $M_{fz} = 0$)



$$\text{En P : } \sigma = -\frac{M_{fz}}{I_{(G, \vec{z})}} \cdot y$$

$$\epsilon_x = \frac{\sigma}{E} = -\frac{M_{fz}}{EI_{(G, \vec{z})}} \cdot y$$

$$\bar{P}\bar{P}' = \epsilon_x \cdot dx = -\frac{M_{fz}}{EI_{(G, \vec{z})}} \cdot y \cdot dx$$

$$\text{Or } \bar{P}\bar{P}' = -y \cdot d\alpha$$

$$\text{D'où : } \frac{d\alpha}{dx} = \frac{M_{fz}}{EI_{(G, \vec{z})}}$$

La ligne moyenne reste normale à la section droite $\Rightarrow Y' = d\alpha \Rightarrow Y'' = \frac{d\alpha}{dx}$

$$\text{Doù } Y'' = \frac{M_{fz}}{EI_{(G, \vec{z})}}$$

Remarque : la valeur de Y à une abscisse donnée correspond à l'angle de rotation d'une section droite.

Cette double intégration est opérée pour chaque tronçon de poutre sur lequel les fonctions $M_{fz}(x)$ et $I_z(x)$ sont définies (pas de discontinuité, au

sens mathématiques du terme sur ces tronçons).

Les constantes d'intégration seront calculées grâce aux conditions aux limites.

Exemples :

au droit d'un encastrement $Y_{(e)} = 0$ $Y'_{(e)} = 0$

au droit d'une articulation $Y_{(a)} = 0$

au droit d'une action mécanique ponctuelle $Y_{(x_a^-)} = Y_{(x_a^+)}$ et $Y'_{(x_a^-)} = Y'_{(x_a^+)}$

La détermination de l'équation de la ligne moyenne déformée permet de réaliser le dimensionnement en déformation de la structure (ex : limitation de la flèche maximale Y_{max} , de la rotation d'une section droite Y'_{max}).

5.2.8 Conditions de Résistance

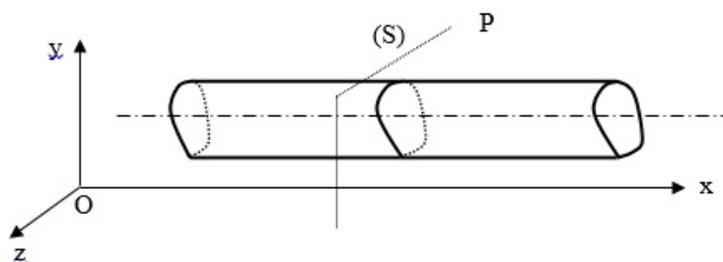
Elle consiste à limiter la valeur de la contrainte normale maximale (en valeur absolue) régnant dans la poutre étudiée par la résistance pratique R_p (voir chapitre traction compression).

$$|\sigma_{max}| \leq R_p$$

Chapitre 6

Etude des Sections Droites

Soit une poutre d'axe parallèle à (O, \vec{x}) et considérons une section droite particulière (S) de cette poutre.

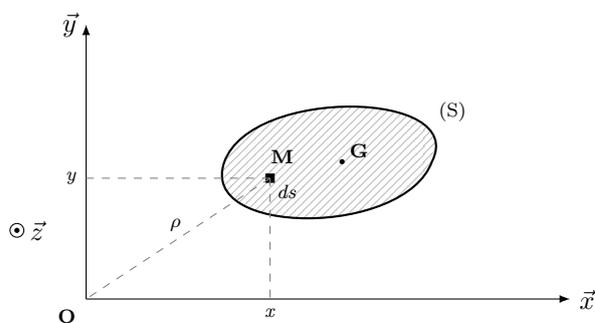


Nous allons définir un certain nombre de grandeurs caractéristiques de cette section.

6.1 Centre de Surface

(S) étant rapporté au repère (Oxy) les coordonnées du centre de surface G sont :

$$y_G = \frac{1}{S} \iint_{(S)} y ds, \quad x_G = \frac{1}{S} \iint_{(S)} x ds$$



6.2 Moments de la Section Droite

6.2.1 Définitions

Moment quadratique de (S) par rapport à un axe

Par rapport aux axes (O, \vec{x}) et (O, \vec{y}) :

$$I_{(O, \vec{x})} = \iint_{(S)} y^2 ds$$

$$I_{(O, \vec{y})} = \iint_{(S)} x^2 ds$$

Avec

$$\vec{OM} = x \vec{x} + y \vec{y}$$

Moment produit de (S) par rapport à deux axes orthogonaux

$$I_{xy} = \iint_{(S)} x \cdot y \cdot ds$$

Si l'un des axes est un axe de symétrie pour (S) \Rightarrow le moment produit est nul.

Moment quadratique polaire de (S) par rapport au point 0

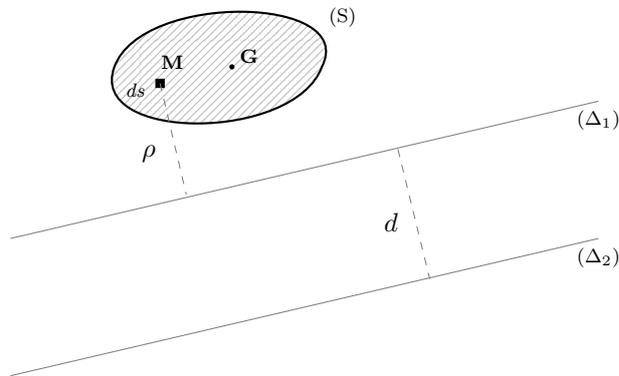
$$I_O = \iint_{(S)} \rho^2 ds$$

Avec $\|\vec{OM}\| = \rho$

Comme $\rho^2 = x^2 + y^2$, $I_O = I_{(O, \vec{x})} + I_{(O, \vec{y})}$

6.2.2 Théorème de HUYGHENS

Relation entre les moments quadratiques de (S) par rapport à deux axes (Δ) et (Δ') parallèles.



$$I_{\Delta_1} = \iint_{(S)} \rho^2 ds$$

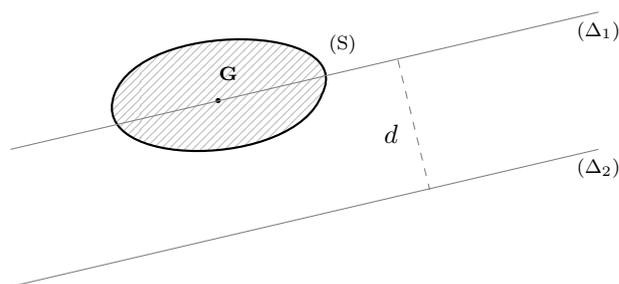
$$I_{\Delta_2} = \iint (\rho + d)^2 ds = \iint \rho^2 ds + d^2 S + 2d \iint \rho ds$$

$$I_{\Delta_2} = I_{\Delta_1} + S d^2 + 2d A_{\Delta}$$

Cas particulier : (Δ_1) passe par G

(Δ_1) passant par G $\Rightarrow A_{(\Delta_1)} = 0$

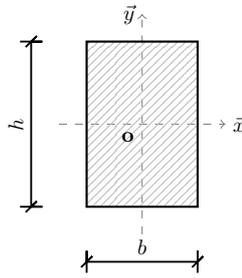
Doù $I_{\Delta_2} = I_{\Delta_1} + S d^2$



Remarque : Lorsque la section (S) est rapportée au repère (G, y, z), les moments sont dits **moments centraux**.

6.2.3 Exemples

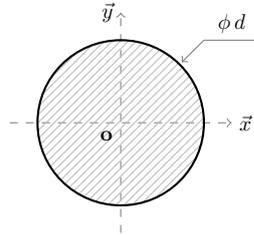
— Section rectangulaire :



$$I_{(G,\bar{x})} = \frac{bh^3}{12} \quad ; \quad I_{(G,\bar{y})} = \frac{hb^3}{12}$$

$$I_o = I_{(G,\bar{x})} + I_{(G,\bar{z})} = \frac{bh}{12}(b^2 + h^2)$$

— Section circulaire :



$$I_{(G,\vec{x})} = I_{(G,\vec{z})} = \frac{\pi d^4}{64}$$

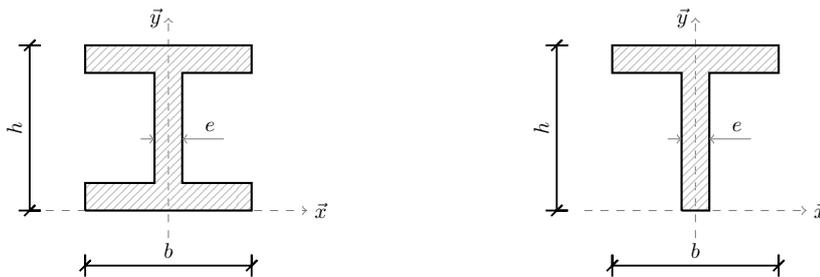
$$I_o = \frac{\pi d^4}{32}$$

6.3 Exercices

6.3.1 Exercice n° 1

Retrouvez les expressions des moments quadratiques des exemples précédents.

6.3.2 Exercice n° 2

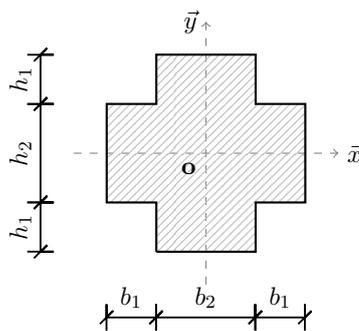


Définir pour chacun de ces profils :

- le centre de surface G
- les moments quadratiques $I_{(G,\vec{x})}$ et $I_{(G,\vec{y})}$ (utiliser le théorème de Huyghens)

6.3.3 Exercice n° 3

Soit une section droite de poutre définie par la figure ci-dessous.
Déterminer les moments quadratiques $I_{(G, \vec{y})}$ et $I_{(G, \vec{z})}$ (utiliser le théorème de Huyghens)



(e)

Chapitre 7

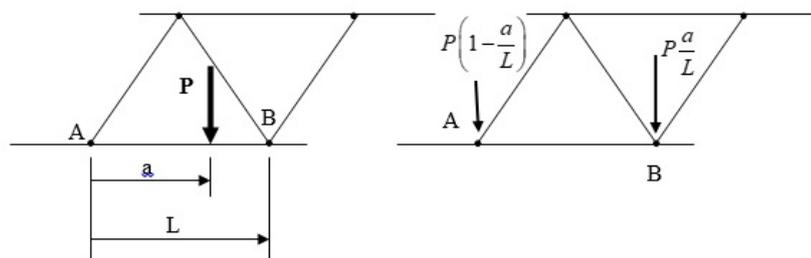
Treillis plans isostatiques

7.1 Définitions

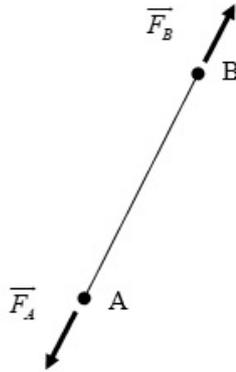
Un treillis est un système composé de barres rectilignes articulées à leurs extrémités entre elles ou avec des appuis extérieurs. Le choix de ce type de structure a pour but d'alléger l'ensemble de la construction tout en lui conservant le maximum de rigidité sous l'effet des sollicitations. Un système composé de seuls triangles est dit triangulé.

7.1.1 Les Efforts

On s'intéressera ici aux treillis plans. Les forces extérieures sont appliquées aux nœuds, dans le plan de la structure. Si ce n'est pas ainsi, on ramène la force au nœud en négligeant le moment fléchissant dans la barre concernée. On pourra de cette façon tenir compte, par exemple, du poids propre des barres.



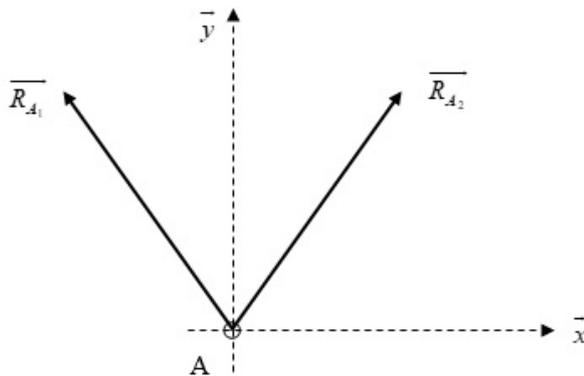
Une barre est en équilibre, si les forces qui sont transmises par les nœuds sont d'intensité égale et de sens opposé.



La barre AB dun treillis nest soumise qu'à la seule action dun effort normal. On adoptera les convention suivantes :

- Si une barre pousse sur un nud, le nud comprime la barre. A cet effort de compression, on attribuera arbitrairement un signe négatif.
- Si une barre tire sur un nud, le nud tend la barre. A cet effort de traction, on attribuera arbitrairement un signe positif.

7.1.2 Isostatisme



Pour un nud du treillis, le théorème de la résultante permet décrire :

$$\sum_i \vec{X}_i = \vec{0} \text{ et } \sum_i \vec{Y}_i = \vec{0}$$

Où :

\vec{X}_i est la composante de leffort appliqué au nud étudié A par la barre i projetée sur laxe $A \vec{x}$.

\vec{Y}_i est la composante de leffort appliqué au nud étudié A par la barre i projetée sur laxe $A \vec{x}$.

Pour n nuds, on dispose donc de $2n$ équations. Si b est le nombre de barres et q le nombre dinconnues de liaison avec le bâti, le nombre dinconnues est $(b + q)$. Un système sera isostatique si $b + q = 2n$, ou son degré dhyperstatisme sera défini par $h = q + b - 2n$.

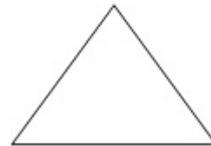
Poutre une structure plane isostatique extérieurement, $q = 3$, la relation ci-dessus devient :

$$b = 2n - 3$$

7.1.3 Indéformabilité



Système déformable



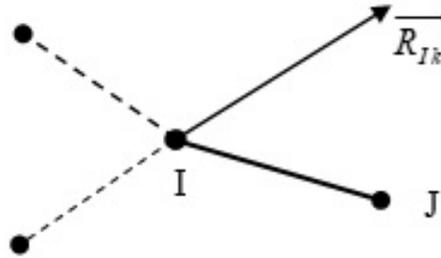
système indéformable

Si on construit un treillis à partir de cellules triangulaires, on obtiendra un ensemble indéformable.

Si b est le nombre de barres et n le nombre de nuds, pour un triangle, on a $b = 3$ et $n = 3$; si on ajoute p nuds, on devra ajouter $2p$ barres, on aura $b = 3 + 2p$ et $n = 3 + p$, en éliminant p, on obtient $b = 2n - 3$. On retrouve la condition disostatisme.

7.2 Calcul des Efforts

La méthode des nuds consiste à écrire léquilibre de chaque nud du treillis. Il convient auparavant de déterminer les réactions dappui extérieures en écrivant le PFS pour la structure globale z.



Soit I un nud quelconque dun treillis plan.

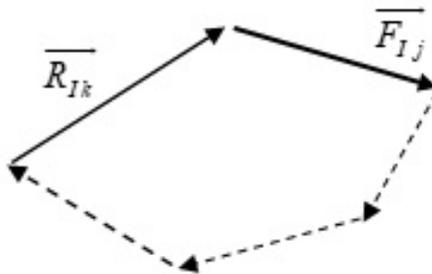
En I sarticulent des barres telles que IJ et sappliquent des efforts extérieurs à la structure tels que \vec{R}_{Ik} .

On désigne par \vec{F}_{Ij} leffort exercé par la barre IJ sur le nud darticulation I. Létude de léquilibre du nud I se ramène à létude de léquilibre du point matériel I soumis aux efforts concourants et coplanaires \vec{F}_{Ij} et \vec{R}_{Ik} . La condition déquilibre sécrit donc :

$$\sum_j \vec{R}_{Ij} + \sum_k \vec{R}_{Ik} = \vec{0}$$

Dans le cas général cette équation vectorielle se traduit par deux équations scalaires de projection sur le repère du plan. En conséquence, létude de léquilibre dun nud permet la détermination dau plus deux composantes inconnues des actions en ce nud.

Remarque : la condition $\sum_j \vec{R}_{Ij} + \sum_k \vec{R}_{Ik} = \vec{0}$ peut se traduire graphiquement par ú la suite des vecteurs \vec{F}_{Ij} et \vec{R}_{Ik} forme un polygone fermé ž.



7.3 Critère de Résistance

La vérification des conditions de résistance d'un treillis consiste à contrôler pour chaque barre que :

— l'effort de traction reste inférieur à l'effort admissible de traction soit :

$$\frac{T}{S} \leq R_p = \frac{1}{k} R_{e0.2}$$

où : T est l'effort de traction dans la barre et S la section de la barre,
— et que l'effort de compression reste inférieur à la valeur critique de flambement. Pour ce dernier critère de dimensionnement se reporter au chapitre suivant intitulé le flambage.

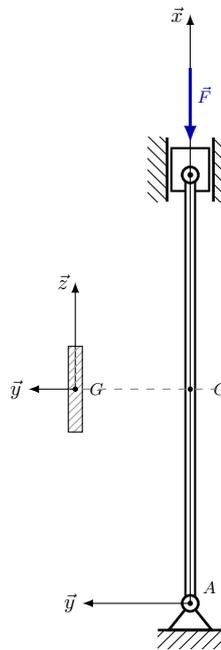
Chapitre 8

Le Flambage

Le flambage est en fait une sollicitation composée de compression et de flexion.

8.1 Introduction

Lorsqu'une pièce (une poutre dans notre cas) suffisamment longue subit un effort axial de compression, on observe successivement deux types de sollicitations :



- Pour une charge axiale F inférieure à une charge limite notée F_c (charge critique), la poutre est comprimée, elle reste rectiligne et se raccourcit.

- Lorsque F atteint F_c , la poutre fléchit brusquement et se rompt très vite. La flexion se produit dans le plan perpendiculaire à la direction principale de la poutre présentant le plus faible moment quadratique de la section droite. Par exemple, sur la figure ci-dessous, la flexion se produit dans le plan (A, \vec{x}, \vec{y}) perpendiculaire à (G, \vec{z}) .

8.2 Flambage d'Euler

8.3 Hypothèses

- La poutre a une section constante et une ligne moyenne rigoureusement droite avant déformation,
- Les liaisons de la poutre avec le milieu extérieur sont des liaisons sphériques parfaites. Pratiquement (et expérimentalement), la flexion se produisant dans le plan, les liaisons sphériques en A et B sont remplacées par des liaisons pivot daxes à \vec{z} , plus faciles à réaliser,
- Le repère $R_0(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est tel que l'axe (A, \vec{x}) est porté par la ligne moyenne de la poutre avant déformation,
- Dans le plan (G, \vec{y}, \vec{z}) de la section droite de la poutre, $I(G, \vec{z}) \prec I(G, \vec{y})$, la déformation aura lieu dans le plan $(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.
- Les actions de liaison se réduisent respectivement en A et B à deux glisseurs dont les résultantes sont opposées,

$$\{\tau(2 \rightarrow 1)\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \vec{A}(2 \rightarrow 1) \\ \vec{0} \end{array} \right\} \text{ Avec } \vec{A}(2 \rightarrow 1) = \|\vec{F}\| \vec{x}$$

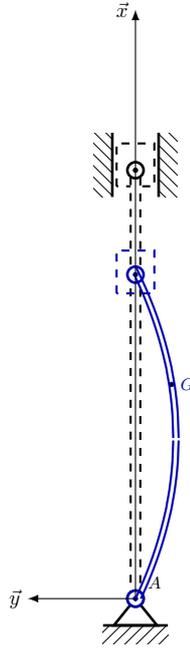
$$\{\tau(3 \rightarrow 1)\}_B = \left\{ \begin{array}{c} \vec{B}(3 \rightarrow 1) \\ \vec{0} \end{array} \right\} \text{ Avec } \vec{B}(3 \rightarrow 1) = -\|\vec{F}\| \vec{x}$$

- Le poids de la poutre est négligé.

8.3.1 Etude de la déformation de flambage

Modélisons la poutre par sa ligne moyenne AB et supposons que sous l'influence des efforts en A et B, cette ligne moyenne prenne une très légère courbure.

Soit G le centre de surface d'une section droite d'abscisse x . Dans le plan (A, \vec{x}, \vec{y}) les coordonnées de G sont $G(x, y)$. Soit $R(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ le repère de définition des sollicitations en G. Compte-tenu de la très faible déformation, $R(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est à $R_0(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.



Le torseur des forces de cohésion en G est $\{\mathcal{T}_{\text{coh}}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R} \\ \vec{M}_G \end{array} \right\}$ avec,

$$\left\{ \begin{array}{c} \vec{R} = -\vec{F} = -F \vec{x} \\ \vec{M}_G = \vec{GB} \cdot (-\vec{F}) = -Fy \vec{z} \end{array} \right\}$$

L'équation de la déformation de la poutre sous l'effet du moment de flexion $M_{f_z} = -F \cdot y$ est donnée par $EI(G, \vec{z})y'' = M_{f_z}$ soit $EI(G, \vec{z})y'' + F \cdot y = 0$. L'équation ci-dessus est une équation différentielle du second ordre, linéaire à coefficients constants, sans second membre dont la solution générale est :

$$y = A \cos \omega x + B \sin \omega x \text{ avec } \omega^2 = \frac{F}{EI(G, \vec{z})}$$

Les constantes A et B peuvent se calculer par les conditions aux limites :

En A : $x = 0$ et $y = 0$ ce qui entraîne $A = 0$

En B : $x = l$ et $y = 0$ ce qui entraîne $B \sin \omega l = 0$.

A étant nul, il est évident que $B \neq 0$ par conséquent $\omega l = k\pi$ ou $\omega = \frac{k\pi}{l}$

En reportant dans $\omega^2 = \frac{F}{EI(G, \vec{z})}$, on en déduit $\frac{k\pi}{l} = \left(\frac{F}{EI(G, \vec{z})} \right)^{-1}$

8.3.2 Charge critique d'Euler

La plus faible valeur de F qui satisfait la relation ci-dessus est désignée

par F_c ou charge critique d'Euler : $F_c = \frac{\pi^2 EI(G, \vec{z})}{l^2}$

où :

- E : module d'Young du matériau constituant la poutre,
- l : longueur de la poutre,
- $I(G, \vec{z})$: moment quadratique de la section de la poutre par rapport à l'axe (G, \vec{z})

Puisque $A = 0$, l'équation de la déformée se résume à $y = B \sin \omega x$, le maximum de la flèche est obtenu pour $\sin \omega x = 1$ c'est à dire pour $\omega x = \frac{\pi}{2}$.

Comme par ailleurs la charge critique d'Euler est définie pour $k = 1$: $\omega = \frac{\pi}{l}$, on en déduit que le maximum de la flèche est en $x = \frac{l}{2}$ et est représenté par B.

L'équation de la déformée est alors : $y = B \sin \frac{\pi x}{l}$

Utilisation pratique de la charge critique :

- Si $F < F_c$, la poutre est et reste rectiligne, elle peut être calculée en compression simple,
- Si $F = F_c$, la poutre fléchit et prend une position d'équilibre élastique,
- Si $F > F_c$: la flèche augmente jusqu'à la rupture.

8.3.3 Longueur libre de flambage

En suivant la même démarche que celle adoptée pour une poutre bi-articulée, il est possible d'établir l'expression de la charge critique pour d'autres conditions aux limites aux extrémités A et B de la poutre. L'expression obtenue, similaire à celle établie pour la poutre bi-articulée, est la suivante :

$$F_c = \frac{\pi^2 EI(G, \vec{z})}{L^2}$$

Où L , appelée longueur libre de flambage, dépend de la nature des liaisons aux extrémités (conditions aux limites).

On adoptera :

- Pour une poutre articulée (liaison pivot) à ses 2 extrémités : $L = l$,
- Pour une poutre encastree (parfaitement), à ses 2 extrémités : $L = l/2$
- Pour une poutre encastree à une extrémité et en liaison pivot à l'autre : $L = 0.7 l$
- Pour une poutre encastree à une extrémité et libre à l'autre, $L = 2l$
Où l représente la longueur réelle de la poutre.

8.3.4 Résistance au flambage d'Euler

La charge critique d'Euler F_c représente une limite à ne pas dépasser. Si on adopte un coefficient de sécurité k , la charge axiale limite que l'on peut

adopter est $F = \frac{F_c}{k}$.

On prend en général pour $k = 2k_c$ où k_c permet de définir la résistance pratique en compression : $R_{cp} = \frac{R_{e0.2}}{k_c}$.

Par conséquent : $F = \frac{R_{cp}}{R_{e0.2}} F_c$

Chapitre 9

Principe de Superposition : Application à la Résolution de Problèmes Hyperstatiques

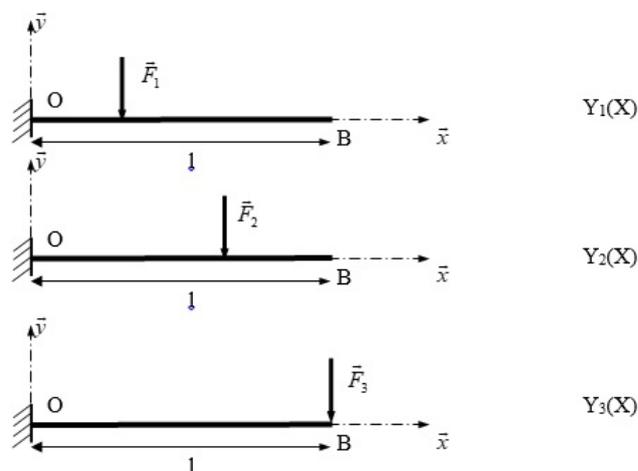
9.1 Principe de Superposition

9.1.1 Énoncé

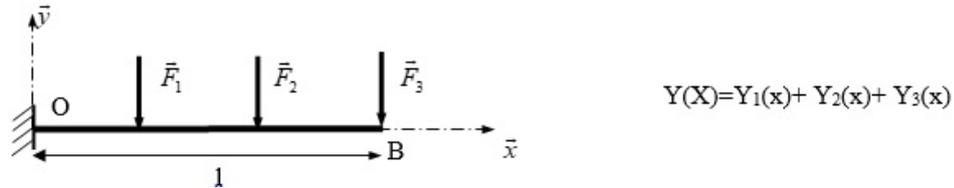
Leffet produit pas plusieurs actions mécaniques est égal à la somme des effets produits par ces actions mécaniques prises séparément. On entend par effet des actions mécaniques, létat de contrainte généré par ces actions ainsi que les déformations associées.

9.1.2 Illustration

Equation de la ligne moyenne déformée



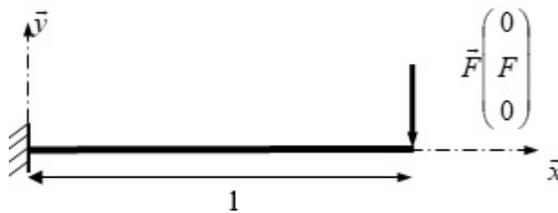
Ainsi dans le cas où l'on a ces trois actions mécaniques simultanément, l'équation de la ligne moyenne déformée est la somme des équations des lignes moyennes déformées de chacun des cas précédents.



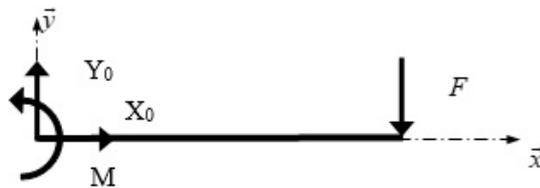
9.2 Isostatisme-Hyperstatisme : Rappel

Un problème de RdM est dit isostatique si l'écriture de l'équilibre de la structure permet de déterminer les actions de liaisons. Le nombre d'inconnues de liaison est donc égal au nombre d'équations disponibles par écriture du principe fondamental de la statique.

Prenons l'exemple d'une poutre droite encastrée avec une charge en son extrémité :



Le torseur associé à la liaison complète en O comprend trois composantes inconnues (X_0 , Y_0 et M_0)



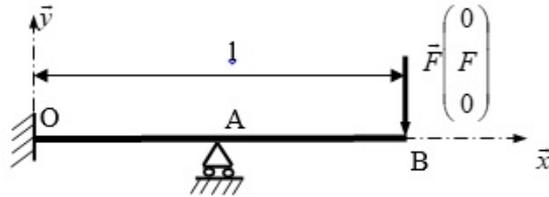
Le problème est plan. Le principe fondamental de la statique appliqué à la poutre isolée nous permet donc d'écrire trois équations :

— Théorème de la résultante statique en projection sur :

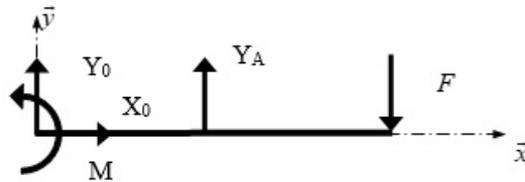
$$\begin{aligned} \vec{x}: X_0 &= 0 \\ \vec{y}: Y_0 + F &= 0 \end{aligned}$$

- Théorème du moment statique en O et en projection sur \vec{z} donne :
 $M_0 + F.l = 0$

Prenons maintenant l'exemple de la même poutre droite encastée en une extrémité avec une charge en son extrémité mais en rajoutant cette fois-ci un appui simple sans frottement en son milieu :



Le torseur associé à la liaison complète en O comprend trois composantes inconnues (X_0, Y_0 et M_0) et celui associé à la liaison ponctuelle en A une composante inconnue (Y_A)



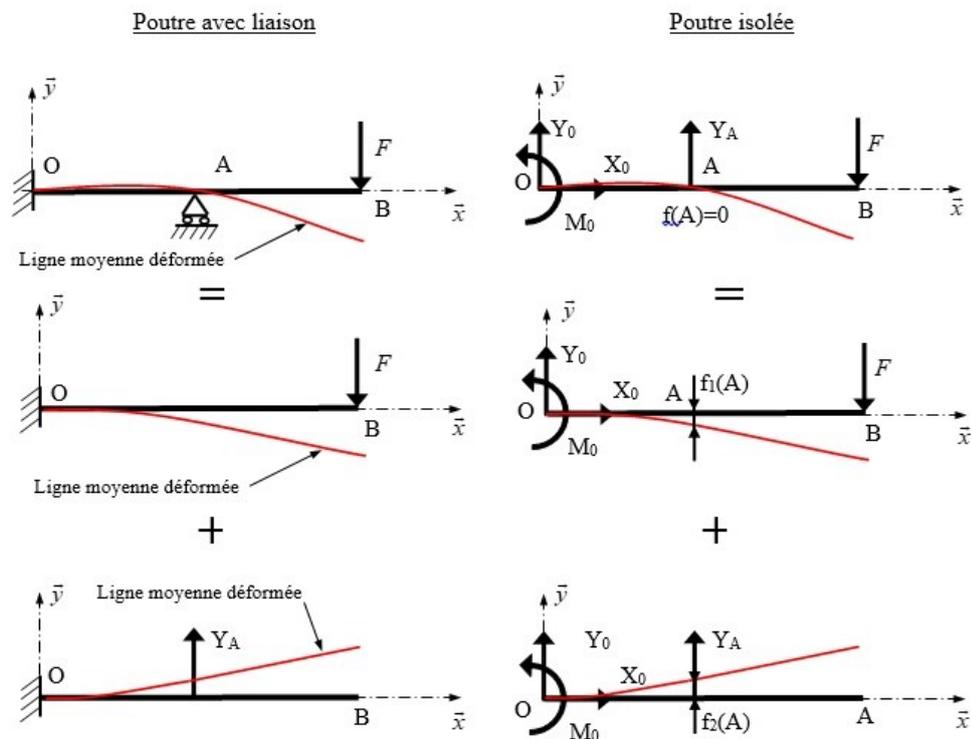
Le problème est plan. Le principe fondamental de la statique nous permet donc décrire trois équations :

- Théorème de la résultante statique en projection sur :
 - \vec{x} : $X_0 = 0$
 - \vec{y} : $Y_0 + Y_A + F = 0$
- Théorème du moment statique en O et en projection sur \vec{z} donne :
 $M_0 + F.l = 0$

Le nombre d'inconnues est plus important que le nombre d'équations. Le problème est dit hyperstatique. Le degré d'hyperstatisme correspond au nombre d'inconnues en trop, ici il est donc de 1. Pour résoudre, il s'agit donc de rechercher une équation supplémentaire.

9.3 Application du Principe de Superposition à la Résolution d'un Problème Hyperstatique

Nous allons donc remplacer notre problème hyperstatique par deux problèmes isostatiques qui superposés correspondent à ce premier.



Dans le cas isostatique n°1, leffort F génère une flèche de la poutre en A notée $f_1(A)$.

Celle-ci peut être totalement déterminée.

Dans le cas isostatique n°2, leffort Y_A génère une flèche de la poutre en A notée $f_2(A)$.

Cette flèche peut être déterminée en fonction de Y_A .

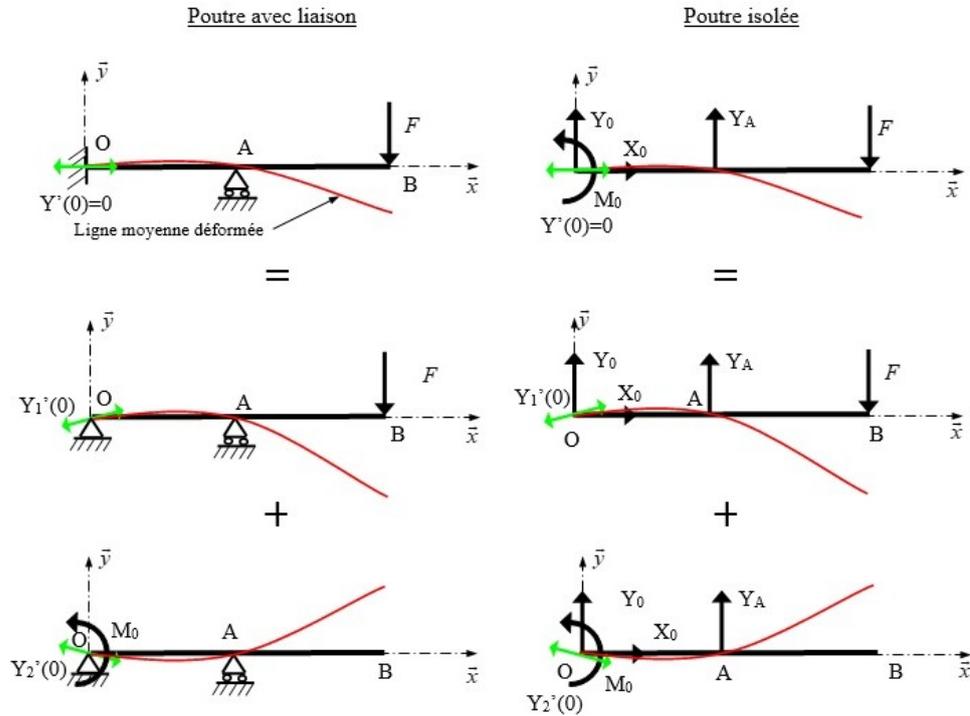
Par application du principe de superposition, pour que les deux problèmes isostatiques soient équivalents au premier nous devons écrire : $f(A) = f_1(A) + f_2(A)$.

Or $f(A)$ est connue : $f(A) = 0$.

La relation obtenue fait intervenir comme seule inconnue la composante Y_A . Sa détermination permet de résoudre complètement le problème.

Nous pouvons considérer notre problème comme la superposition d'autres problèmes isostatiques. Au lieu d'exploiter la flèche nulle de la poutre en A ($f(A) = 0$), nous pouvons exploiter la rotation nulle de la section droite en O : $Y(0) = 0$. Pour cela, il faut donc libérer la rotation en O sur un des

problèmes isostatiques.



Dans le cas isostatique n°1, leffort F génère une rotation de la section droite en O : $Y_1'(0)$. Celle-ci peut être totalement déterminée.

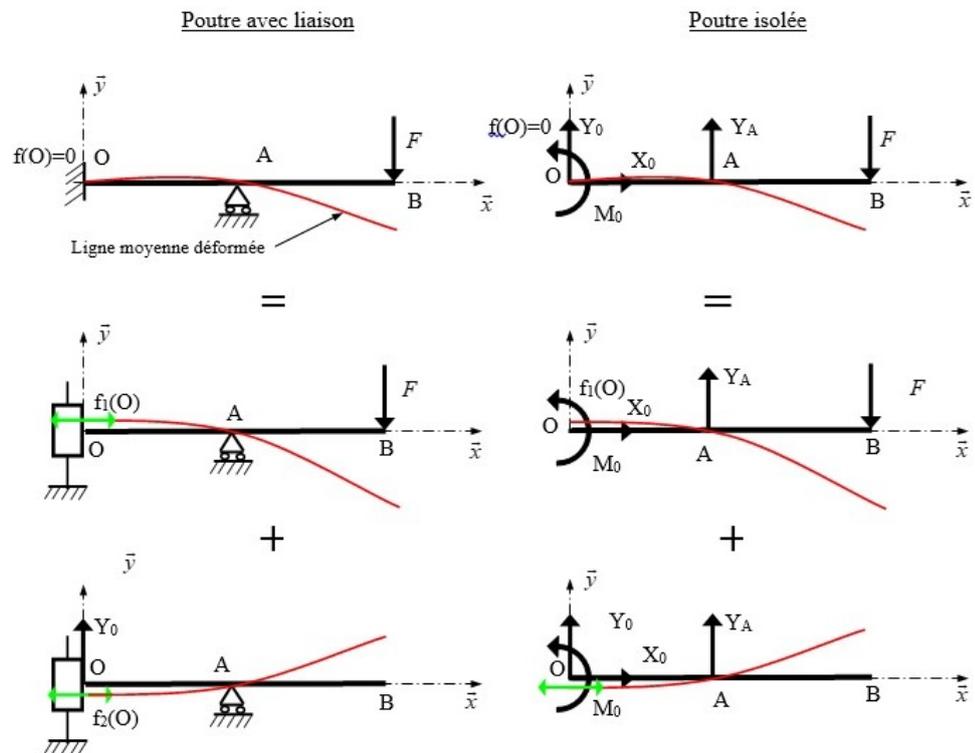
Dans le cas isostatique n°2, le moment M_0 génère une rotation de la section droite en O : $Y_2'(0)$. Cette quantité peut être déterminée en fonction de M_0 .

Par application du principe de superposition, pour que les deux problèmes isostatiques soient équivalents au premier nous devons écrire : $Y(0) = Y_1(0) + Y_2(0)$.

Or $Y(0)$ est connue : $Y(0) = 0$.

La relation obtenue fait intervenir comme seule inconnue la composante M_0 . Sa détermination permet de résoudre complètement le problème.

Un troisième cas est envisageable. Nous pouvons cette fois ci exploiter la flèche nulle en O : $f(0) = 0$. Pour cela, il faut donc libérer la translation suivant \vec{y} en O sur un des problèmes isostatiques.



Dans le cas isostatique n°1, leffort F génère une flèche de la poutre en O : $f_1(0)$.

Celle-ci peut être totalement déterminée.

Dans le cas isostatique n°2, leffort Y_0 génère une flèche de la poutre en O : $f_2(0)$. Cette dernière peut être déterminée en fonction de Y_0 .

Par application du principe de superposition, pour que les deux problèmes isostatiques soient équivalents au premier nous devons écrire : $f(0) = f_1(0) + f_2(0)$.

Or $f(0)$ est connue : $f(0) = 0$.

La relation obtenue fait intervenir comme seule inconnue la composante Y_0 . Sa détermination permet de résoudre complètement le problème.

9.4 Exercices

9.4.1 Exercice 1

En utilisant le principe de superposition, retrouver l'équation de la ligne moyenne déformée pour le problème précédent et ceci de trois manières différentes.

9.4.2 Exercice 2

En utilisant le principe de superposition, retrouver l'équation de la ligne moyenne déformée pour les problèmes suivants

