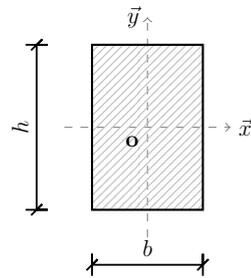
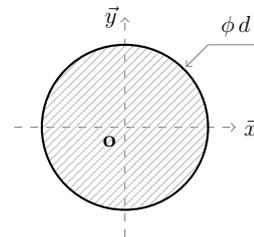


**Exercice 1**

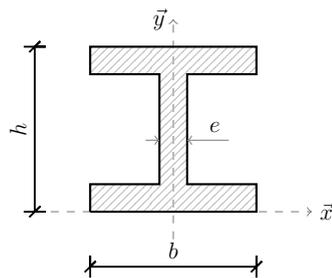
On considère les sections droites suivantes :



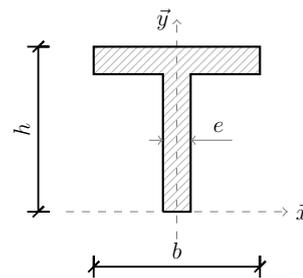
(a)



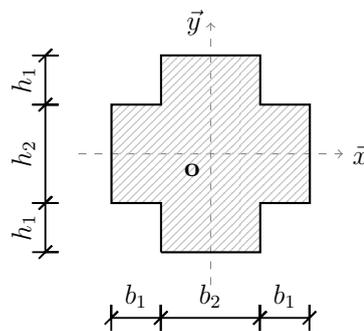
(b)



(c)



(d)



(e)

1°) Dans chacun des cas, déterminer les moments quadratiques  $I_{(o,x)}$  ainsi que  $I_{(o,y)}$ .

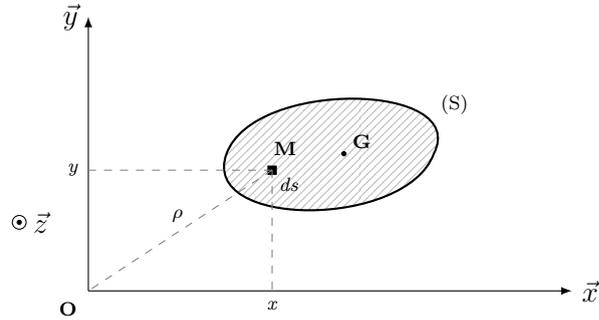
---

# SOLUTION

---

## Exercice 1

Faisons un petit rappel sur la géométrie des sections.



Moment quadratique  
par rapport à l'axe  
( $o, \vec{x}$ )

$$I_{(o,x)} = \iint_{(S)} y^2 ds$$

Moment quadratique  
par rapport à l'axe  
( $o, \vec{y}$ )

$$I_{(o,y)} = \iint_{(S)} x^2 ds$$

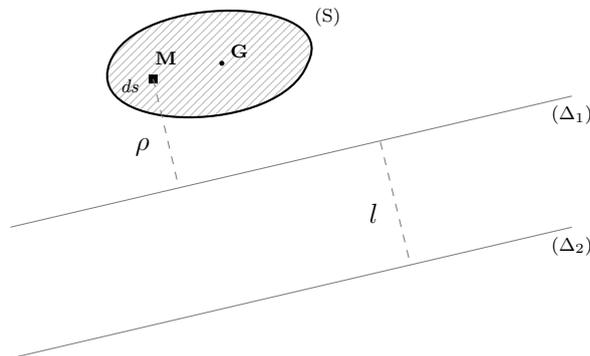
Moment produit par  
rapport au plan ( $x, y$ )

$$I_{(x,y)} = \iint_{(S)} xy ds$$

Moment quadratique  
polaire par rapport à  
l'origine  $o$

$$I_o = \iint_{(S)} \rho^2 ds$$

Le théorème de Huyghens :



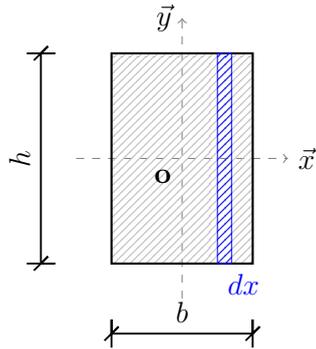
$$I_{\Delta_1} = \iint_{(S)} \rho^2 ds$$

$$I_{\Delta_2} = \iint_{(S)} (\rho + l)^2 ds = l^2 S + \iint_{(S)} \rho^2 ds + 2l \iint_{(S)} \rho ds$$

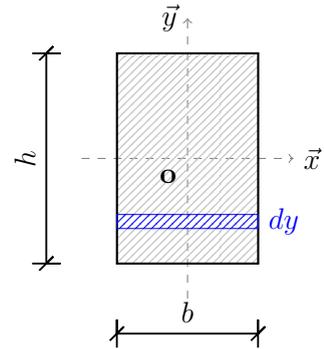
$$I_{\Delta_2} = I_{\Delta_1} + S^2 + 2l M_{s(\Delta_1)}$$

Pour  $\Delta_1$  passant par  $\mathbf{G}$  alors  $M_{s(\Delta_1)} = 0$ .

Section (a)



(a<sub>1</sub>)



(a<sub>2</sub>)

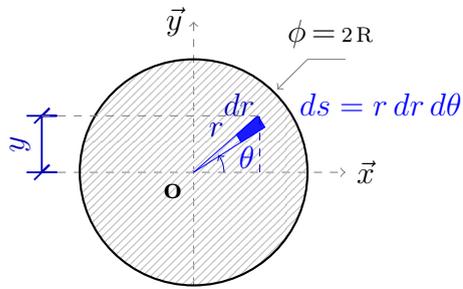
Rappelons l'équation du moment quadratique d'une section par rapport à l'axe  $(o, \vec{y})$  :

$$\begin{aligned} I_{(o,y)} &= \iint_{(S)} x^2 ds \\ &= \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} h x^2 dx \\ &= h \frac{x^3}{3} \Big|_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \\ I_{(o,y)} &= \frac{h b^3}{12} \end{aligned}$$

De même, le moment quadratique par rapport à l'axe  $(o, \vec{x})$

$$\begin{aligned} I_{(o,x)} &= \iint_{(S)} y^2 ds \\ &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} b y^2 dy \\ &= b \frac{y^3}{3} \Big|_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \\ I_{(o,x)} &= \frac{b h^3}{12} \end{aligned}$$

Section (b)



$$\begin{aligned} I_{(o,x)} &= \iint_{(S)} y^2 ds = \int_0^R \int_0^{2\pi} r^3 \sin^2 \theta d\theta \\ &= \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta \\ &= \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} \left( \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \right) d\theta \\ &= \frac{r^4}{4} \Big|_0^R \left[ \frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{\pi R^4}{4} \end{aligned}$$

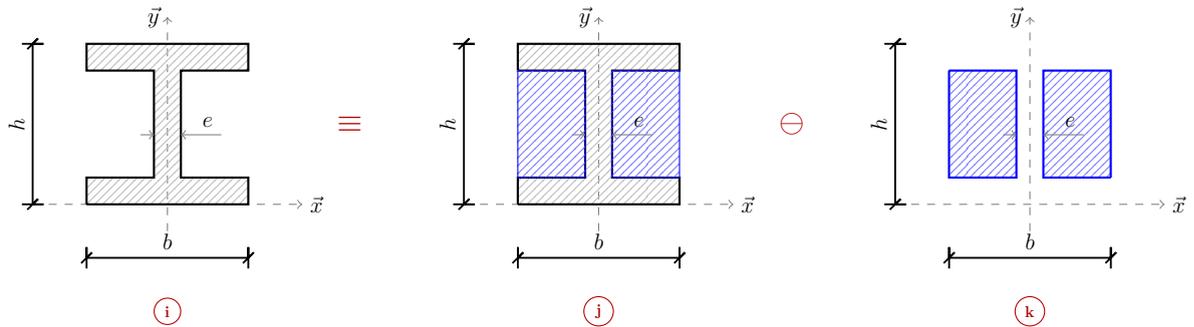
ce qui donne :

$$I_{(o,x)} = \frac{\pi \phi^4}{64}$$

De même  $I_{(o,y)} = \frac{\pi \phi^4}{64}$  pour des raisons de symétrie

## Section (c)

Dans ce cas, la section considérée peut être la soustraction des deux sections suivantes ( $o$  étant l'origine du repère) :



Pour la section  $j$ , on a une section rectangulaire, on peut utiliser la méthode d'intégration directe ou appliquer le théorème de Huyghens. Par la méthode directe, le moment  $I_{(o,x)}^j$  est donné par :

$$I_{(o,x)}^j = \iint_{(S)} y^2 ds = \int_0^{+h} b y^2 dy$$

$$= b \frac{y^3}{3} \Big|_0^{+h}$$

Après calcul,  $I_{(o,x)}^j = \frac{b h^3}{3}$

Pour l'axe  $(o, y)$  on a,  $I_{(o,y)}^j = \frac{h b^3}{12}$  car l'axe passe par le centre de gravité.

Pour ce qui est de la section  $k$ , on va procéder de la même manière. Par la méthode directe on aura :

$$I_{(o,x)}^k = \iint_{(S)} y^2 ds = 2 \int_e^{h-e} \frac{(b-e)}{2} y^2 dy$$

$$= (b-e) \frac{y^3}{3} \Big|_e^{h-e}$$

Après calcul,  $I_{(o,x)}^k = \frac{(b-e)}{3} ((h-e)^3 - e^3)$

$I_{(o,y)}^k$  est donné par :

$$\begin{aligned} I_{(o,y)}^k &= \iint_{(S)} x^2 ds = 2 \int_{\frac{e}{2}}^{\frac{b}{2}} (h - 2e) y^2 dy \\ &= 2(h - 2e) \frac{y^3}{3} \Big|_{\frac{e}{2}}^{\frac{b}{2}} \end{aligned}$$

Après calcul,  $I_{(o,y)}^k = \frac{(h - 2e)}{12} (b^3 - e^3)$

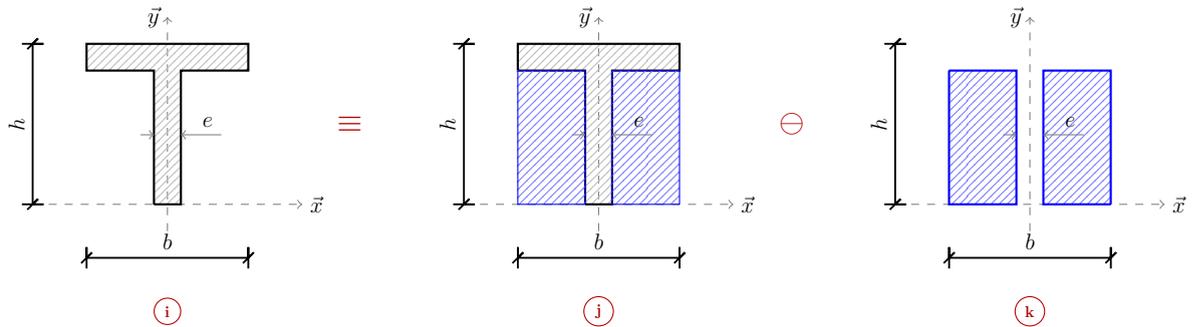
Finalement,

$$\begin{aligned} I_{(o,x)}^i &= I_{(o,x)}^j - I_{(o,x)}^k \\ I_{(o,x)}^i &= \frac{bh^3}{3} - \frac{(b - e)}{3} ((h - e)^3 - e^3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{(o,y)}^i &= I_{(o,y)}^j - I_{(o,y)}^k \\ I_{(o,y)}^i &= \frac{hb^3}{12} - \frac{(h - 2e)}{12} (b^3 - e^3) \end{aligned}$$

## Section (d)

Dans ce cas et comme précédemment, la section considérée peut être la soustraction des deux sections suivantes (voir figure ci-dessous) :



Pour la section  $j$ , on a une section rectangulaire, on peut utiliser la méthode d'intégration directe ou appliquer le théorème de Huyghens. Par la méthode directe, le moment  $I_{(o,x)}^j$  est donné par :

$$I_{(o,x)}^j = \iint_{(S)} y^2 ds = \int_0^{+h} b y^2 dy$$

$$= b \frac{y^3}{3} \Big|_0^{+h}$$

Après calcul,  $I_{(o,x)}^j = \frac{b h^3}{3}$

Pour l'axe  $(o, y)$  on a,  $I_{(o,y)}^j = \frac{h b^3}{12}$  car l'axe passe par le centre de gravité.

Pour ce qui est de la section  $k$ , on va procéder de la même manière. Par la méthode directe on aura :

$$I_{(o,x)}^k = \iint_{(S)} y^2 ds = 2 \int_0^{h-e} \frac{(b-e)}{2} y^2 dy$$

$$= (b-e) \frac{y^3}{3} \Big|_0^{h-e}$$

Après calcul,  $I_{(o,x)}^k = \frac{(b-e)}{3} (h-e)^3$

$I_{(o,y)}^k$  est donné par :

$$\begin{aligned} I_{(o,y)}^k &= \iint_{(S)} x^2 ds = 2 \int_{\frac{e}{2}}^{\frac{b}{2}} (h-e) y^2 dy \\ &= 2(h-e) \frac{y^3}{3} \Big|_{\frac{e}{2}}^{\frac{b}{2}} \end{aligned}$$

Après calcul,  $I_{(o,y)}^k = \frac{(h-e)}{12} (b^3 - e^3)$

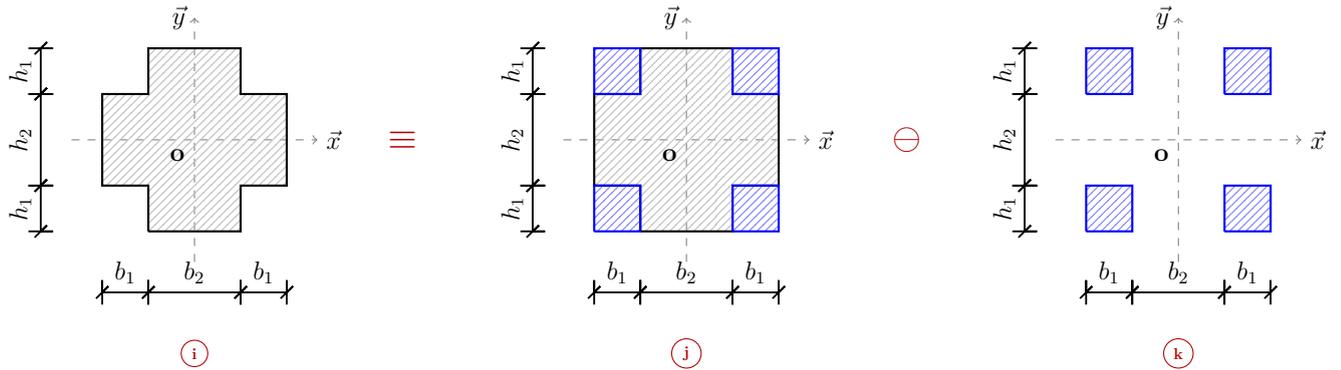
Finalement,

$$\begin{aligned} I_{(o,x)}^i &= I_{(o,x)}^j - I_{(o,x)}^k \\ I_{(o,x)}^i &= \frac{b h^3}{3} - \frac{(b-e)}{3} (h-e)^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{(o,y)}^i &= I_{(o,y)}^j - I_{(o,y)}^k \\ I_{(o,y)}^i &= \frac{h b^3}{12} - \frac{(h-e)}{12} (b^3 - e^3) \end{aligned}$$

## Section (e)

Dans ce cas et comme précédemment, la section considérée peut être la soustraction des deux sections suivantes (voir figure ci-dessous) :



Pour la section  $j$ , on a une section rectangulaire, on peut utiliser la méthode d'intégration directe ou appliquer le théorème de Huyghens. Par la méthode directe, le moment  $I_{(o,x)}^j$  est donné par :

$$\begin{aligned} I_{(o,x)}^j &= \iint_{(S)} y^2 ds = \int_0^{+h} b y^2 dy \quad \text{avec } b = b_2 + 2b_1 \\ &= b \frac{y^3}{3} \Big|_0^{+h} \quad \text{avec } h = h_2 + 2h_1 \end{aligned}$$

$$\text{Après calcul, } I_{(o,x)}^j = \frac{b h^3}{3} = \frac{(b_2 + 2b_1)(h_2 + 2h_1)^3}{3}$$

$$\text{Pour l'axe } (o,y) \text{ on a, } I_{(o,y)}^j = \frac{h b^3}{3} = \frac{(h_2 + 2h_1)(b_2 + 2b_1)^3}{12}$$

Pour ce qui est de la section  $k$ , on va utiliser Huyghens pour le petit carré. On aura alors :

$$\begin{aligned} I_{(o,x)_c}^k &= I_{(G,x)_c}^k + \Delta_y^2 S \quad \text{avec } \Delta_y^2 = \frac{(h_2 + h_1)^2}{2} \quad \text{et } S = h_1 b_1 \\ I_{(o,x)_c}^k &= \frac{b_1 h_1^3}{12} + \frac{h_1 b_1 (h_2 + h_1)^2}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Enfin, } I_{(o,x)}^k = \frac{b_1 h_1}{3} (h_1^2 + 6(h_2 + h_1))$$

Finalement,

$$\begin{aligned} I_{(o,x)}^i &= I_{(o,x)}^j - I_{(o,x)}^k \\ I_{(o,x)}^i &= \frac{b h^3}{3} - \frac{b_1 h_1}{3} (h_1^2 + 6(h_2 + h_1)) \end{aligned}$$

Pour ce qui est de  $I_{(o,y)}$  on procède de la même manière, c'est à dire :

$$I_{(o,y)}^i = I_{(o,y)}^j - I_{(o,y)}^k$$

Pour des raison de symetrie  $I_{(o,y)}^i = I_{(o,x)}^i$  en remplaçant  $b_i$  par  $h_i$  et vice-versa.

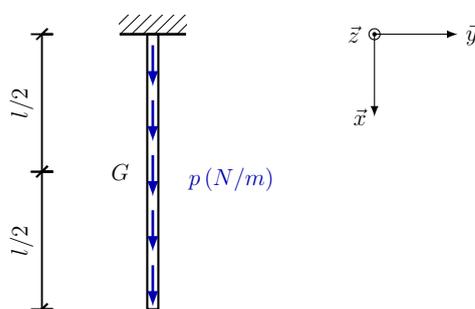
$$I_{(o,y)}^i = I_{(o,y)}^j - I_{(o,y)}^k$$
$$I_{(o,y)}^i = \frac{h b^3}{3} - \frac{h_1 b_1}{3} (b_1^2 + 6 (b_2 + b_1))$$

## TD RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX

Pr. R. Kouddane

**Exercice 1**

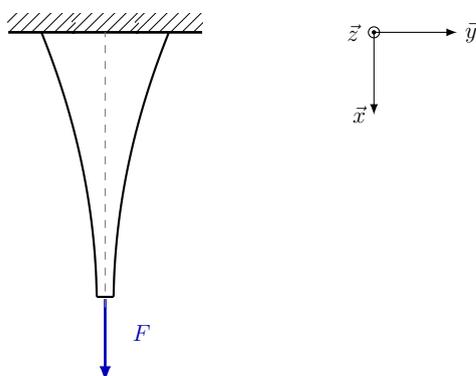
Soit une poutre verticale encastrée à une de ses extrémités et soumise à son poids propre (poids linéique  $p$ ). Cette poutre a une longueur  $l$  et une section constante  $S$ .



- 1°) Déterminer l'allongement de la poutre lorsqu'elle est soumise au champ de pesanteur.
- 2°) Déterminer le déplacement d'une section droite  $S_G$  située à  $l/2$ .

**Exercice 2**

Détermination de la forme d'égalité de résistance pour une poutre rectiligne soumise à son poids propre et à une charge d'extrémité. Poids volumique  $\omega$  et contrainte admissible  $\sigma_p$ .

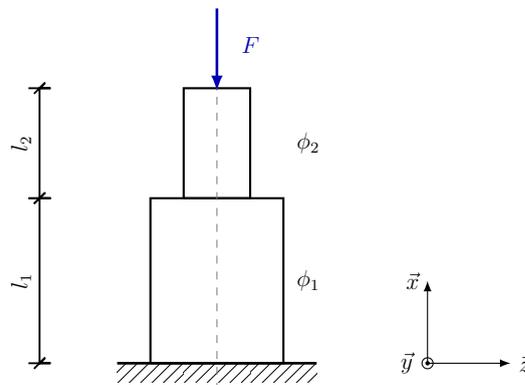


- 1°) Déterminer les  $\phi$  extrêmes d'un câble de puits de mine en acier d'une longueur de 500 met supportant une nacelle de 2 103 daN. On prendra une résistance pratique  $\sigma_p = 100$  MPa et un poids volumique  $\omega = 7 800$  daN m<sup>-3</sup>.
- 2°) Déterminer le diamètre du câble de section constante, supportant la même nacelle.
- 3°) Calculer les poids respectifs des 2 câbles précédents.

### Exercice 3

Une construction est supportée par des colonnes de sections circulaires et d'une hauteur de 35 m. Chaque colonne porte une charge de  $3 \cdot 10^5$  daN. La contrainte de compression admissible dans le matériau constituant les colonnes est  $\sigma_p = 2$  MPa. Le poids volumique de ce matériau est  $\omega = 2200$  daN m<sup>-3</sup>. On envisage trois types de colonnes :

- 1°) Les colonnes étant de section constante, déterminer leur diamètre et leur poids.
- 2°) Les colonnes sont constituées par deux cylindres superposés (figure ci-dessous)



3°) Déterminer  $l_1$  et  $l_2$  (rappel  $l_1 + l_2 = 35$  m) pour que le poids de colonne soit le plus faible possible. Calculer alors  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  ainsi que le poids de la colonne.

4°) Les colonnes sont de section variable de telle sorte que la contrainte normale dans toute section droite soit la même.

- 5°) Déterminer le poids de cette colonne.
- 6°) Comparer les trois hypothèses faites.

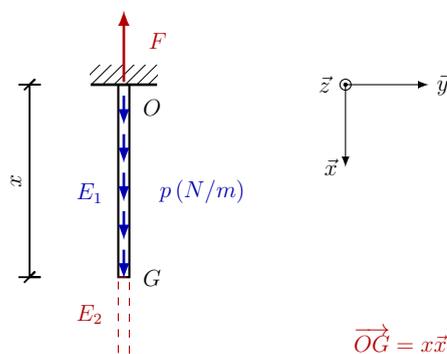
---

## SOLUTION

---

### Exercice 1

1°) Détermination de l'allongement de la poutre lorsqu'elle est soumise au champs de pesanteur.



Equilibrons le tronçon  $E_1$  :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$$

Ce qui donne

$$P_{roj/x} \longrightarrow -F + pl = 0$$

alors

$$F = pl$$

$$\{\mathcal{T}_{coh}\}_G = \{\mathcal{T}_{E_2 \rightarrow E_1}\}_G = -\{\mathcal{T}_{E \rightarrow E_1}\}_G$$

$$\{\mathcal{T}_{coh}\}_G = \begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_G$$

$$N = -(-F + px) \quad \text{avec} \quad F = pl$$

La sollicitation étant une sollicitation de traction pur et l'effort normal qui vaut ici  $N = p(l-x)$

génère une contrainte normale  $\sigma = \frac{p(l-x)}{S}$

La dilatation linéique suivant  $x$  s'écrit :  $\epsilon_x = \frac{\sigma}{E} = \frac{p(l-x)}{ES}$

l'allongement de la poutre vaut :  $\Delta l = \int_0^l \epsilon_x dx = \int_0^l \frac{p(l-x)}{ES} = \frac{pl^2}{2ES}$

2°) Déterminons le déplacement d'une section droite  $S_A$  située à  $l/2$  Le déplacement relatif suivant l'axe de traction entre deux points 1 et 2 s'écrit :

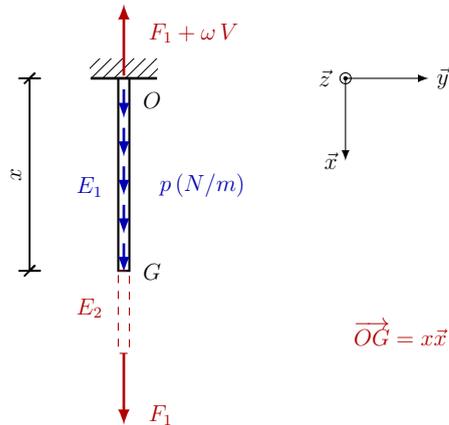
$$u_2 - u_1 = \int_{x_1}^{x_2} \epsilon_x dx$$

dans notre cas, en tenant compte de l'encastrement de la poutre en  $1_{(x_1=0)}$ , on trouve :

$$u_{l/2} = \int_0^{l/2} \epsilon_x dx = \frac{3pl^2}{8ES}$$

## Exercice 2

1°) Détermination des  $\phi$  extrêmes d'un câble de puit en acier de longueur  $500\text{ m}$  et supportant une nacelle de  $2103\text{ daN}$ . Nous allons déterminer la forme d'égalité de résistance pour une poutre rectiligne soumise à son propre poids et à une charge à son extrémité. Poids volumique :  $\omega = 7.8\text{ kg} \cdot \text{dm}^{-3}$ . Contrainte admissible  $\sigma_p = 100\text{ MPa}$ .



$$\{\mathcal{T}_{\text{coh}}\}_G = - \{\mathcal{T}_{\bar{E} \rightarrow E_1}\}_G$$

$$\text{Ainsi, } \{\mathcal{T}_{\text{coh}}\}_G = \begin{Bmatrix} F_1 + \omega V & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_G \quad V \text{ étant le volume de } E_2$$

Le câble est soumis à une sollicitation de traction pure avec un effort normal  $N = F_1 + \omega V$  qui génère une contrainte normale  $\sigma = \frac{N}{S} = \frac{F_1 + \omega V}{S}$

L'objectif est d'obtenir la même contrainte normale dans toute les sections droites, soit  $\sigma = \sigma_p$ . On peut donc écrire :  $\sigma_p S = F_1 + \omega V$

On différencie cette expression :  $\sigma_p dS = \omega dV$  avec  $dV = S du$  ce qui va donner  $\frac{dS}{S} = \frac{\omega}{\sigma_p} du \Big|_x^l$

$$\text{Après integration} \quad \ln \left| \frac{S}{k} \right| = \frac{\omega}{\sigma_p} (l - x) \quad \implies \quad S(x) = k \exp\left(\frac{\omega}{\sigma_p} (l - x)\right)$$

$$\text{Pour } x = l, S(x) = S_o \text{ avec } S_o = \frac{F_1}{\sigma_p} \quad \text{donc} \quad S(x) = \frac{F_1}{\sigma_p} \exp\left(\frac{\omega}{\sigma_p} (l - x)\right)$$

### Application numérique

$$S(x = l) = S_o = \frac{F_1}{\sigma_p} \implies S_o = 200\text{ mm}^2 \quad \text{soit un diamètre d'environ } 16\text{ mm}$$

$$S(x = 0) = \frac{F_1}{\sigma_p} \exp\left(\frac{\omega}{\sigma_p} l\right) \implies S(x = 0) = 295\text{ mm}^2 \quad \text{soit un diamètre d'environ } 19,4\text{ mm}$$

2°) Détermination du diamètre  $\phi_c$  du câble de section constante supportant la même nacelle. Le torseur de cohésion s'exprime par :

$$\{\mathcal{T}_{\text{coh}}\}_G = \left\{ \begin{array}{cc} F_1 + \omega S (l - x) & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_G$$

Avec un câble de section constante, la contrainte normale sera maximale dans la section où l'effort normal sera maximal soit en  $x = 0$ .

Ceci génère une contrainte normale  $\sigma(0) = \frac{N(0)}{S} = \frac{F_1 + \omega S l}{S}$  avec  $\sigma(0) = \sigma_p$

d'où

$$S = \frac{F_1}{\sigma_p - \omega l} \implies S = 327.86 \text{ mm}^2 \quad \text{soit un diamètre d'environ } 20.4 \text{ mm}$$

3°) Calcul des poids respectifs des deux câbles.

Le poids du câble d'égale résistance :

$$P_1 = \int_0^l \omega S(x) dx = \int_0^l \omega \frac{F_1}{\sigma_p} \exp\left(\frac{\omega}{\sigma_p} (l - x)\right) dx \implies P_1 = 954 \text{ daN}$$

Le poids du câble de section constante :

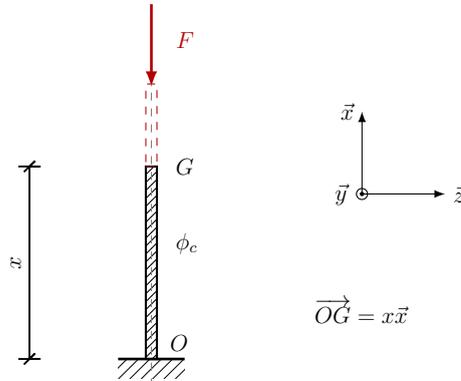
$$P_2 = \omega S l \implies P_2 = 1278 \text{ daN}$$

Remarque : L'utilisation d'un câble de section variable dit " d'égale résistance" permet un gain de poids de 34 %.

### Exercice 3

Une construction est supportée par des colonnes de sections circulaires et d'une hauteur de 35 m. Chaque colonne porte une charge de  $3 \cdot 10^5$  daN. La contrainte de compression admissible dans le matériau constituant les colonnes est  $\sigma_p = 2$  MPa. Le poids volumique de ce matériau est  $\omega = 2\,200$  daN m<sup>-3</sup>.

1°) Détermination du diamètre  $\phi_c$  et du poids  $P_c$  des deux colonnes de section constante.



Le torseur de cohésion s'exprime par :

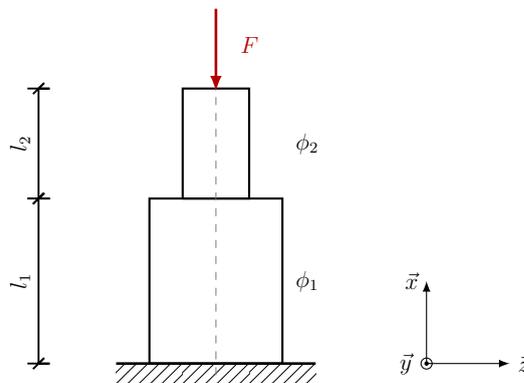
$$\{\mathcal{T}_{\text{coh}}\}_G = \left\{ \begin{array}{ccc} -F - \omega S_c (l - x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right\}_G$$

La poutre étant de section constante, la contrainte normale sera maximale dans la section où l'effort normal sera maximal soit en  $x = 0$ .

Ceci génère une contrainte normale  $\sigma(0) = \frac{N(0)}{S_c} = \frac{-F - \omega S_c l}{S_c}$  avec  $\sigma(0) = \sigma_p$

$$\text{D'où } S_c = \frac{F}{\sigma_p + \omega l} \text{ et } \phi_c = \sqrt{\frac{4F}{\pi(\sigma_p + \omega l)}} \Rightarrow \phi_c = 1.76 \text{ m et } P_c = \omega S_c l = 1\,878 \text{ KN}$$

2°) Détermination de  $l_1$ ,  $l_2$ ,  $\phi_1$  et  $\phi_2$  pour que le poids de la colonne soit le plus faible possible puis calcul de ce poids  $P_{\text{min}}$ .



Dans la section  $x = l_1^+$  :  $N = -F - \omega l_2 S_2 = \sigma_p S_2 \implies S_2 = -\frac{F}{\sigma_p + \omega l_2}$

Dans la section  $x = 0^+$  :  $N = -F - \omega l_2 S_2 - \omega l_1 S_1 = \sigma_p S_1$

D'où  $S_1 = -\frac{F}{\sigma_p + \omega l_1} + \frac{F \omega l_2}{(\sigma_p + \omega l_1)(\sigma_p + \omega l_2)}$  avec  $P = \omega (S_1 l_1 + S_2 l_2)$

Soit en fonction de  $l$  et  $l_1$  :  $P = \omega F \frac{\sigma_p l + \omega l_1 (l - l_1)}{\sigma_p (\sigma_p + \omega l) + \omega^2 l_1 (l - l_1)}$

On cherche la valeur de  $l_1$  qui minimise le poids  $P$  en écrivant la relation suivante :  $\frac{\partial P}{\partial l_1} = 0$

On trouve la solution suivante :  $l_1 = l_2 = \frac{l}{2} = 17.5 \text{ m}$

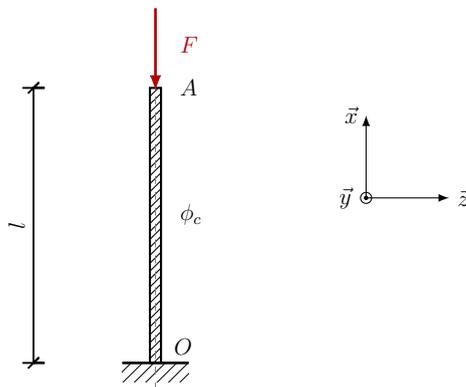
Ce qui donne :

$S_2 = 1.85 \text{ m}^2$  soit un diamètre  $\phi_2 = 1.54 \text{ m}$

$S_1 = 2.30 \text{ m}^2$  soit un diamètre  $\phi_1 = 1.71 \text{ m}$

$P_{min} = \frac{\omega l (S_1 + S_2)}{2} = 1600 \text{ KN}$

3°) Détermination du poids de la colonne supposée de section variable de telle sorte que la contrainte normale dans toute section droite soit la même.



Avec les mêmes conventions que précédemment (Exo. 2-1), on obtient :

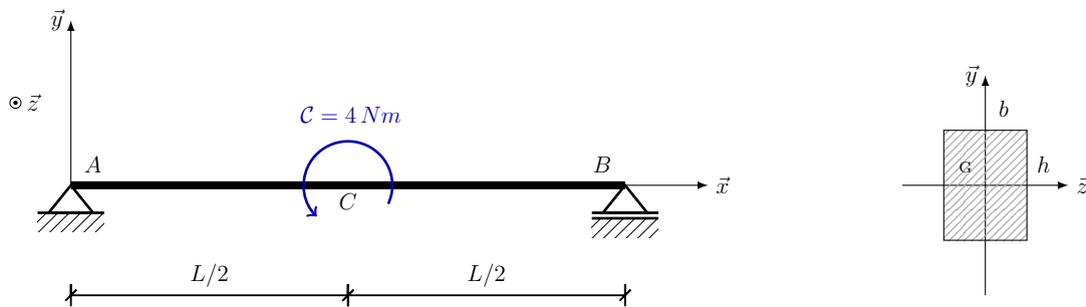
$S_A = \frac{F}{\sigma_p} = 1.5 \text{ m}^2$  soit un diamètre  $\phi_A = 1.38 \text{ m}$

$S_O = S_A \exp\left(\frac{\omega l}{\sigma_p}\right) = 2.204 \text{ m}^2$  soit un diamètre  $\phi_O = 1.675 \text{ m}$

Poids de cette colonne : on a  $P_c + F = -\sigma_p S_O$  soit  $P_c = -F - \sigma_p S_O = 1408 \text{ KN}$

## Exercice 1

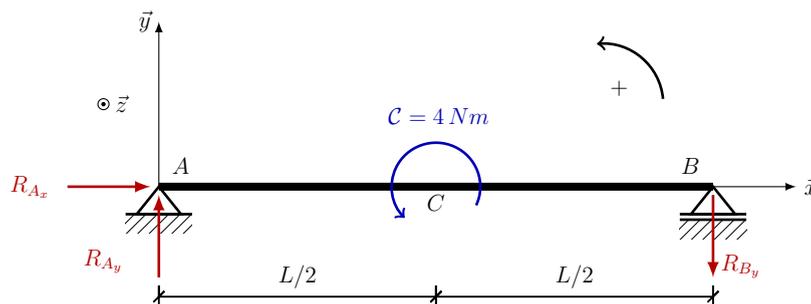
On considère une poutre  $AB$  de longueur  $L$  sur 2 appuis simples. La poutre est soumise à un couple  $C$  appliqué en son milieu.



- 1°) Etablir le bilan des efforts.
- 2°) Déterminer l'expression de l'effort tranchant ainsi que le moment fléchissant.
- 3°) Tracer les diagrammes

## Solution1

Etablissons le bilan des effort. L'effort  $R_{By}$  est orienté vers le bas à cause du moment qui tend à soulever l'extrémité  $B$  de la poutre.



Ecrivons les équations d'équilibre

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$$

donne

$$P_{roj/x} \longrightarrow R_{Ax} = 0 ; P_{roj/y} \longrightarrow R_{Ay} - R_{By} = 0$$

et

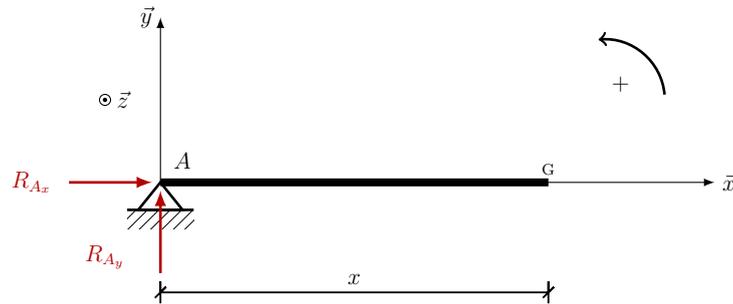
$$\sum \vec{M}_{F_{ext}/A} = \vec{0}$$

donne

$$C - R_{By} L = 0 \Rightarrow R_{By} = R_{Ay} = \frac{C}{L}$$

nous avons 2 zones :  $0 < x < L/2$  et  $L/2 < x < L$

Zone 1 :  $0 < x < L/2$



L'équilibre du tronçon 1 de la poutre donne :

$$\left\{ \mathcal{T}_{coh} \right\}_G = - \left\{ \mathcal{T}_{ext \rightarrow 1} \right\}_G$$

avec

$$\left\{ \mathcal{T}_{coh} \right\}_G = \begin{pmatrix} N & 0 \\ T_y & 0 \\ 0 & M_{f_z} \end{pmatrix}$$

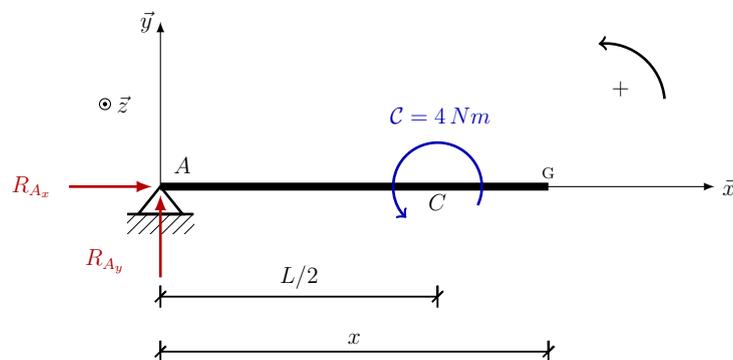
Ce qui donne

$$N = -R_{Ax} = 0 \quad , \quad T_y = -R_{Ay} = -\frac{C}{L} \quad \text{et} \quad M_{f_z} = R_{Ay} x = \frac{C}{L} x$$

donc nous avons :

$$\begin{aligned} N &= 0 \\ T_y &= -\frac{C}{L} \\ M_{f_z} &= \frac{C}{L} x \end{aligned}$$

Zone 2 :  $L/2 < x < L$



L'équilibre du tronçon 2 de la poutre donne :

$$\left\{ \mathcal{T}_{coh} \right\}_G = - \left\{ \mathcal{T}_{ext \rightarrow 1} \right\}_G$$

avec

$$\left\{ \mathcal{T}_{coh} \right\}_G = \begin{pmatrix} N & 0 \\ T_y & 0 \\ 0 & M_{f_z} \end{pmatrix}$$

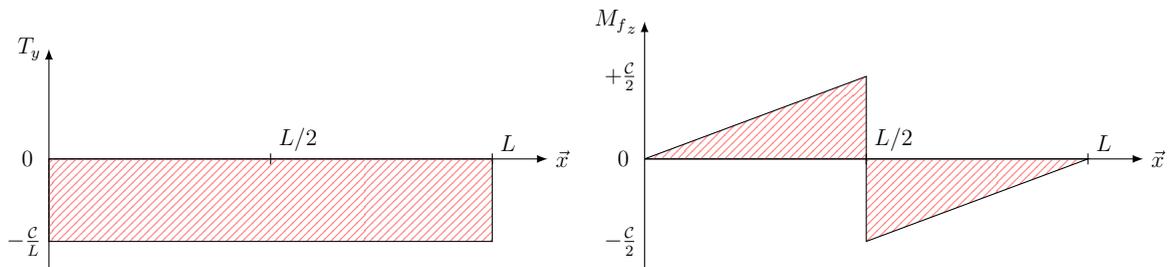
Ce qui donne

$$N = -R_{Ax} = 0 \quad , \quad T_y = -R_{Ay} = -\frac{C}{L} \quad \text{et} \quad M_{fz} = R_{Ay}x - C = \frac{C}{L}x - C$$

donc nous avons :

$$\begin{aligned} N &= 0 \\ T_y &= -\frac{C}{L} \\ M_{fz} &= C\left(\frac{x}{L} - 1\right) \end{aligned}$$

Diagrammes :  $T_y$  et  $M_{fz}$

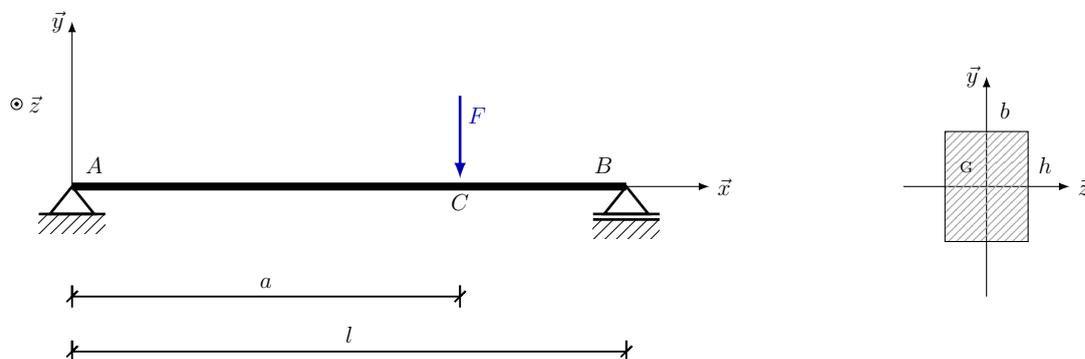


## TD RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX

Pr. R. Kouddane

## Exercice 1

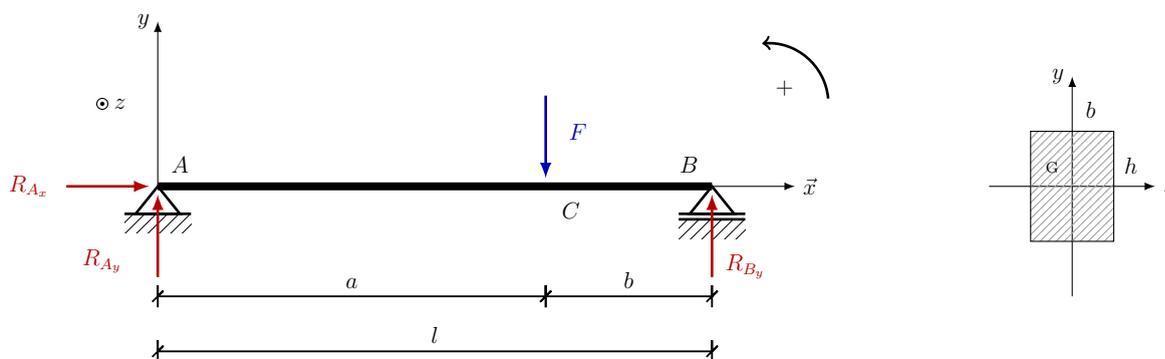
On considère une poutre  $AB$  de section rectangulaire ( $bh$ ) et de longueur  $l$  sur 2 appuis simples. La poutre est soumise à une charge  $F$  appliquée à une distance  $a$  de son extrémité. La poutre est en acier dont la limite pratique à la traction  $\sigma_p$  et le module d'élasticité longitudinal est  $E$ .



- 1°) Etablir le bilan des efforts.
- 2°) Déterminer l'expression de l'effort tranchant ainsi que le moment fléchissant.
- 3°) Tracer les diagrammes
- 4°) Etablir l'expression de la hauteur minimale  $h_{min}$  pour une valeur de  $b$  donnée.
- 5°) Etablir l'expression de la déformée (flèche). Endéduire la valeur de flèche maximale.

## SOLUTION

1- Etablissons le bilan des effort.



Ecrivons les équations d'équilibre

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$$

donne

$$P_{roj/x} \longrightarrow R_{Ax} = 0 ; P_{roj/y} \longrightarrow R_{Ay} + R_{By} - F = 0$$

et

$$\sum \vec{M}_{F_{ext}/A} = \vec{0}$$

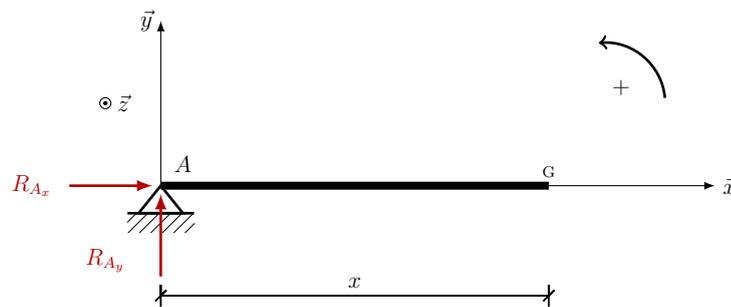
donne

$$R_{By} l - F a = 0 \Rightarrow R_{By} = \frac{F a}{l}$$

$$R_{Ay} = \frac{F(l-a)}{l} = \frac{F b}{l}$$

2- Nous avons 2 zones :  $0 < x < a$  et  $a < x < l$

Zone 1 :  $0 < x < a$



L'équilibre du tronçon 1 de la poutre donne :

$$\left\{ \mathcal{T}_{coh} \right\}_G = - \left\{ \mathcal{T}_{ext \rightarrow 1} \right\}_G$$

avec

$$\left\{ \mathcal{T}_{coh} \right\}_G = \begin{pmatrix} N & 0 \\ T_y & 0 \\ 0 & M_{fz} \end{pmatrix}$$

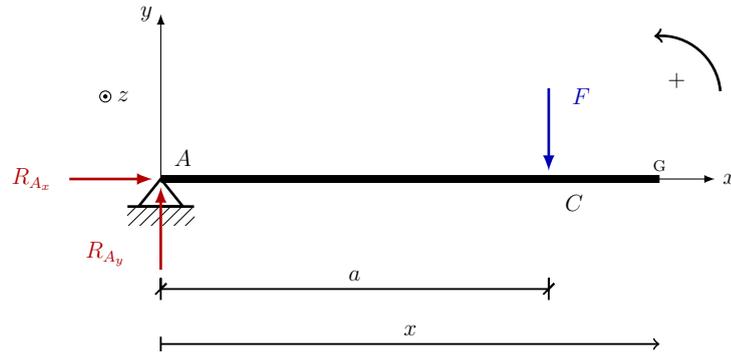
Ce qui donne

$$N = -R_{Ax} = 0 \quad , \quad T_y = -R_{Ay} = -\frac{F b}{l} \quad \text{et} \quad M_{fz} = R_{Ay} x = \frac{F b}{l} x$$

donc nous avons :

$$\begin{aligned} N &= 0 \\ T_y &= -\frac{F b}{l} \\ M_{fz} &= \frac{F b}{l} x \end{aligned}$$

Zone 2 :  $a < x < l$



L'équilibre du tronçon 2 de la poutre donne :

$$\left\{ \mathcal{T}_{coh} \right\}_G = - \left\{ \mathcal{T}_{ext \rightarrow 1} \right\}_G$$

avec

$$\left\{ \mathcal{T}_{coh} \right\}_G = \begin{pmatrix} N & 0 \\ T_y & 0 \\ 0 & M_{f_z} \end{pmatrix}$$

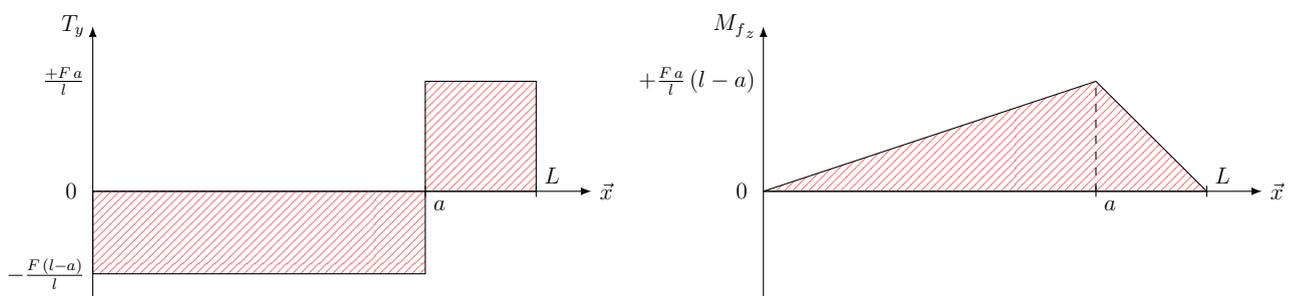
Ce qui donne

$$N = -R_{Ax} = 0 \quad , \quad T_y = -R_{Ay} + F = \frac{F a}{l} \quad \text{et} \quad M_{f_z} = R_{Ay} x - F(x - a) = \frac{F a}{l} (l - x)$$

donc nous avons :

$$\begin{aligned} N &= 0 \\ T_y &= \frac{F a}{l} \\ M_{f_z} &= \frac{F a}{l} (l - x) \end{aligned}$$

### 3- Diagrammes : $T_y$ et $M_{f_z}$



### 4- Expression de $h_{min}$ .

la condition de résistance est donnée par l'équation suivante :  $\sigma_{max} \leq \sigma_p$  ce qui donne

$$\frac{M_{f_z max}}{I_{(G,z)}} y_{max} \leq \sigma_p$$

$$\frac{F a (l - a)}{l} \frac{h}{12} \leq \sigma_p$$

$$\frac{6 F a (l - a)}{l b h^2} \leq \sigma_p$$

ce qui donne

$$\frac{6 F a (l - a)}{l b \sigma_p} \leq h^2$$

Finalement, on aura :

$$h \geq \sqrt{\frac{6 F a (l - a)}{l b \sigma_p}}$$

5- Equation de la déformée  $y(x)$ .

La déformée est donnée par (Effort tranchant négligé) l'équation différentielle suivante :

$$y''(x) = \frac{M_{fz}}{E I_{(G,z)}}$$

$$y''(x) = \frac{M_{fz}}{E I_{(G,z)}} \quad \text{avec} \quad E : \text{Module d'Young (MPa)}$$

Nous avons 2 zones, ce qui va nous donner 2 équations de la flèche.

Zone 1 :  $0 < x < a$

$$M_{fz} = \frac{F b}{l} x$$

$$\begin{aligned} E I_{(G,z)} y_1''(x) &= \frac{F b}{l} x \\ &= A x \quad \text{avec} \quad A = \frac{F b}{l} \end{aligned}$$

Une première intégration donne :

$$E I_{(G,z)} y_1'(x) = A \frac{x^2}{2} + C_1$$

Une deuxième intégration donne :

$$E I_{(G,z)} y_1(x) = A \frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2 \quad (C_1, C_2 : \text{Constantes d'intégration})$$

Zone 2 :  $a < x < l$

$$M_{fz} = \frac{F a}{l} (l - x)$$

$$\begin{aligned} E I_{(G,z)} y_2''(x) &= \frac{F a}{l} (l - x) \\ &= B (l - x) \quad \text{avec} \quad B = \frac{F a}{l} \end{aligned}$$

Une première intégration donne :

$$E I_{(G,z)} y_2'(x) = -B \frac{(l - x)^2}{2} + C_3$$

Une deuxième intégration donne :

$$E I_{(G,z)} y_2(x) = B \frac{(l - x)^3}{6} + C_3 x + C_4 \quad (C_3, C_4 : \text{Constantes d'intégration})$$

Détermination des Constantes d'intégration :  $C_1, C_2, C_3$  et  $C_4$

Nous avons :

$$y_1(0) = 0 \quad , \quad y_2(l) = 0 \quad , \quad y_1(a) = y_2(a) \quad , \quad y_1'(a) = y_2'(a)$$

$$y_1(0) = 0 \Rightarrow A \frac{0^3}{6} + C_1 \cdot 0 + C_2 = 0$$

$$\textcircled{1} \quad \Rightarrow C_2 = 0$$

$$y_2(l) = 0 \Rightarrow B \frac{(l-l)^3}{6} + C_3 l + C_4 = 0$$

$$\Rightarrow C_3 l + C_4 = 0$$

$$\textcircled{2} \quad \Rightarrow C_4 = -C_3 l$$

$$y_1(a) = y_2(a) \Rightarrow A \frac{a^3}{6} + C_1 a + C_2 = B \frac{(l-a)^3}{6} + C_3 a + C_4$$

$$\textcircled{3} \quad \Rightarrow A \frac{a^3}{6} + C_1 a = B \frac{(l-a)^3}{6} + C_3 (a-l)$$

$$y_1'(a) = y_2'(a) \Rightarrow A \frac{a^2}{2} + C_1 = -B \frac{(l-a)^2}{2} + C_3$$

$$\textcircled{4} \quad \Rightarrow C_3 = A \frac{a^2}{2} + C_1 + B \frac{(l-a)^2}{2}$$

En combinant  $\textcircled{2}$  ,  $\textcircled{3}$  et  $\textcircled{4}$  nous pouvons déduire que :

$$C_1 = \frac{A a^3 - B (l-a)^3}{3l} - \frac{A a^2}{2}$$

$$C_3 = \frac{A a^3 - B (l-a)^3}{3l} + \frac{B (l-a)^2}{2}$$

$$C_4 = \frac{B (l-a)^3 - A a^3}{3} - \frac{B l (l-a)^2}{2}$$

Enfin,

$$y(a) = \frac{F a^2 b^2}{3 E I_{(G,z)} l}$$

$$\text{Pour } a > \frac{l}{2} \quad y_{max} = \frac{F b}{27 E I_{(G,z)} l} \sqrt{3 (l^2 - b^2)^3}$$

Cas particulier :  $a = \frac{l}{2}$

On aura :

$$R_{Ay} = R_{By} = \frac{F}{2}$$

$$C_1 = -\frac{F l^2}{16} \quad , \quad C_3 = \frac{F l^2}{16} \quad , \quad C_4 = -\frac{F l^3}{16}$$

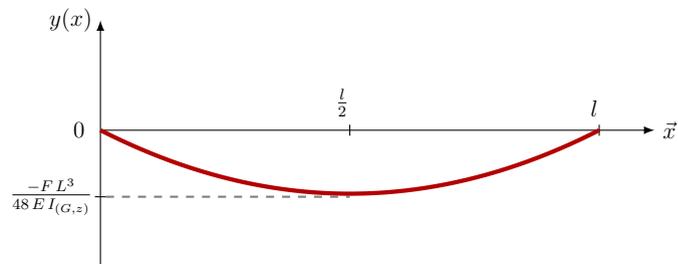
Ce qui donne :

$$E I_{(G,z)} y_1(x) = \frac{F}{12} x^3 - \frac{F l^2}{16} x$$

$$E I_{(G,z)} y_2(x) = \frac{F}{12} (l-x)^3 + \frac{F l^2}{16} x - \frac{F l^3}{16}$$

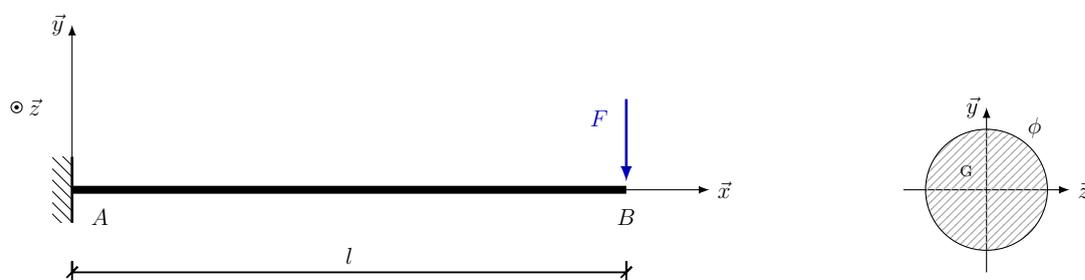
La flèche maximale est donnée par :

$$y_{max} = -\frac{F l^3}{48 E I_{(G,z)}} \quad \text{pour } x = \frac{l}{2}$$



**Exercice 1**

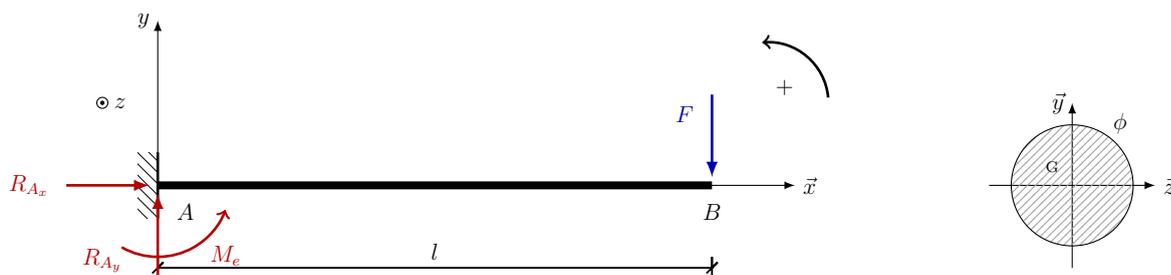
On considère une poutre  $AB$  de section circulaire (diamètre  $\phi$ ) et de longueur  $l$  encastée à une extrémité et libre sur l'autre. La poutre est soumise à une charge concentrée  $F$  appliquée à son extrémité libre. La poutre est en acier dont la limite pratique à la traction  $\sigma_p$  et le module d'élasticité longitudinal est  $E$ .



- 1°) Etablir le bilan des efforts.
- 2°) Déterminer l'expression de l'effort tranchant ainsi que le moment fléchissant.
- 3°) Tracer les diagrammes
- 4°) Etablir l'expression de la hauteur minimale  $h_{min}$  pour une valeur de  $b$  donnée.
- 5°) Etablir l'expression de la déformée (flèche). Endéduire la valeur de flèche maximale.

**SOLUTION**

1- Etablissons le bilan des effort.



Ecrivons les équations d'équilibre

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$$

donne

$$P_{roj/x} \longrightarrow R_{Ax} = 0 ; P_{roj/y} \longrightarrow R_{Ay} - F = 0 \Rightarrow R_{Ay} = F$$

et

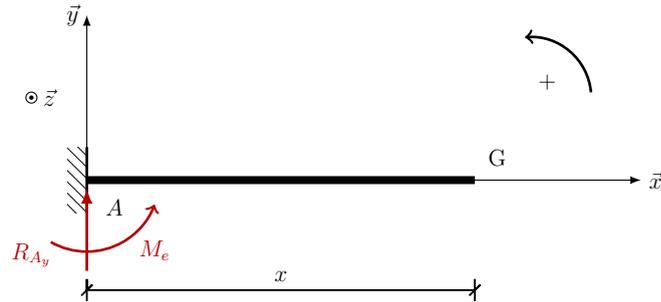
$$\sum \vec{M}_{F_{ext}/A} = \vec{0}$$

donne

$$M_e - Fl = 0 \Rightarrow M_e = Fl$$

2- Nous avons 1 seule zone :  $0 < x < l$

Zone 1 :  $0 < x < l$



L'équilibre du tronçon 1 de la poutre donne :

$$\left\{ \mathcal{T}_{coh} \right\}_G = - \left\{ \mathcal{T}_{ext \rightarrow 1} \right\}_G$$

avec

$$\left\{ \mathcal{T}_{coh} \right\}_G = \begin{pmatrix} N & 0 \\ T_y & 0 \\ 0 & M_{f_z} \end{pmatrix}$$

Ce qui donne

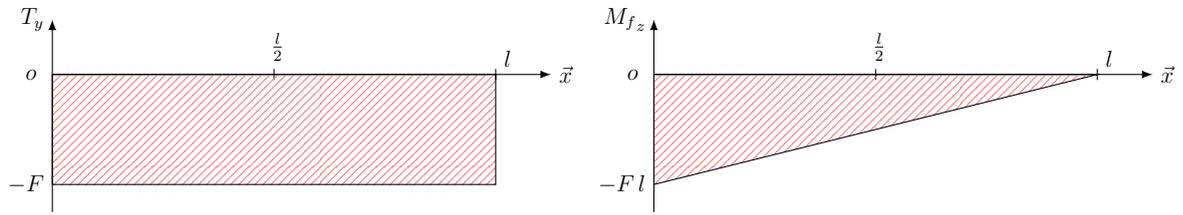
$$N = -R_{Ax} = 0 \quad , \quad T_y = -R_{Ay} = -F$$

$$M_{f_z} = R_{Ay} x - M_e = Fx - Fl \quad , \quad M_{f_z} = F(x - l)$$

donc nous avons :

$$\begin{aligned} N &= 0 \\ T_y &= -F \\ M_{f_z} &= F(x - l) \end{aligned}$$

3- Diagrammes :  $T_y$  et  $M_{f_z}$



4- Expression de  $h_{min}$ .

la condition de résistance est donnée par l'équation suivante :  $\sigma_{max} \leq \sigma_p$  ce qui donne

$$\frac{M_{f_z max}}{I_{(G,z)}} y_{max} \leq \sigma_p$$

$$\frac{Fl}{\pi \phi^4} \frac{\phi}{2} \leq \sigma_p$$

$$\frac{32 Fl}{\pi \phi^3} \leq \sigma_p$$

ce qui donne

$$\frac{32 Fl}{\pi \sigma_p} \leq \phi^3$$

Finalement, on aura :

$$R = \frac{\phi}{2} \geq \sqrt[3]{\frac{4 Fl}{\pi \sigma_p}}$$

### 5- Equation de la déformée $y(x)$ .

La déformée est donnée par (Effort tranchant négligé) l'équation différentielle suivante :

$$y''(x) = \frac{M_{fz}}{E I_{(G,z)}}$$

$$y''(x) = \frac{M_{fz}}{E I_{(G,z)}} \quad \text{avec } E : \text{Module d'Young (MPa)}$$

Nous avons 1 zone donc 1 seule équation de la flèche.

$$M_{fz} = F(x - l)$$

$$E I_{(G,z)} y''(x) = F(x - l)$$

Une première intégration donne :

$$E I_{(G,z)} y'(x) = \frac{F}{2} (x - l)^2 + C_1$$

Une deuxième intégration donne :

$$E I_{(G,z)} y(x) = \frac{F}{6} (x - l)^3 + C_1 x + C_2 \quad (C_1, C_2 : \text{Constantes d'intégration})$$

Détermination des Constantes d'intégration :  $C_1$  et  $C_2$

Nous avons :

$$y(0) = 0 \Rightarrow C_2 = \frac{F l^3}{6}, \quad y'(0) = 0 \Rightarrow C_1 = -\frac{F l^2}{2}$$

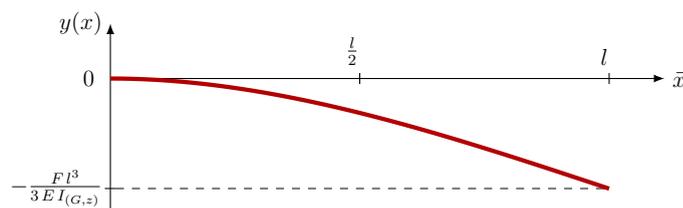
Donc,

$$E I_{(G,z)} y(x) = \frac{F}{6} (x - l)^3 - \frac{F l^2}{2} x + \frac{F l^3}{6}$$

$$y(x) = \frac{F x^2}{6 E I_{(G,z)}} (x - 3l)$$

$$y_{max} = y(x) \Big|_{x=l}$$

$$y_{max} = -\frac{F l^3}{3 E I_{(G,z)}}$$

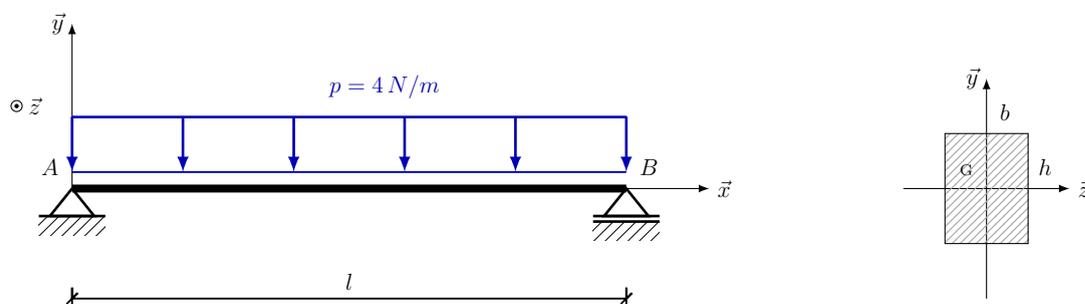


## TD RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX

Pr. R. Kouddane

## Exercice 1

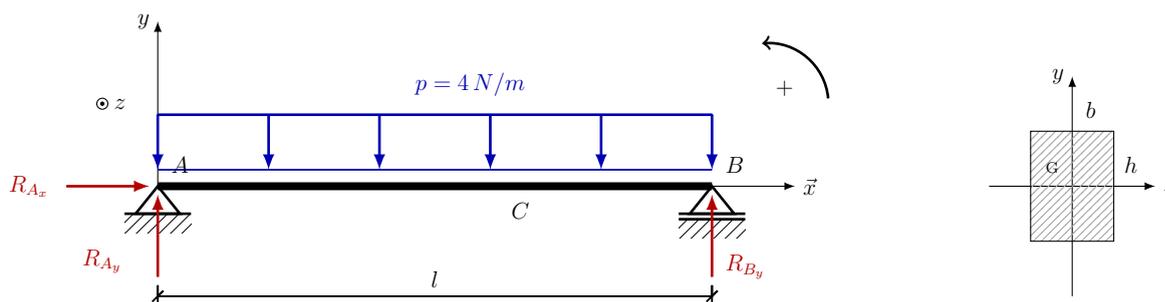
On considère une poutre  $AB$  de section rectangulaire ( $b h$ ) et de longueur  $l$  sur 2 appuis simples. La poutre est soumise à une charge uniformément répartie  $p$  appliquée sur toute la longueur de la poutre. La poutre est en acier dont la limite pratique à la traction  $\sigma_p$  et le module d'élasticité longitudinal est  $E$ .



- 1°) Etablir le bilan des efforts.
- 2°) Déterminer l'expression de l'effort tranchant ainsi que le moment fléchissant.
- 3°) Tracer les diagrammes
- 4°) Etablir l'expression de la hauteur minimale  $h_{min}$  pour une valeur de  $b$  donnée.
- 5°) Etablir l'expression de la déformée (flèche). Endéduire la valeur de flèche maximale.

## SOLUTION

1- Etablissons le bilan des effort.



Ecrivons les équations d'équilibre

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$$

donne

$$P_{roj/x} \longrightarrow R_{Ax} = 0 ; P_{roj/y} \longrightarrow R_{Ay} + R_{By} - pl = 0$$

et

$$\sum \vec{M}_{F_{ext}/A} = \vec{0}$$

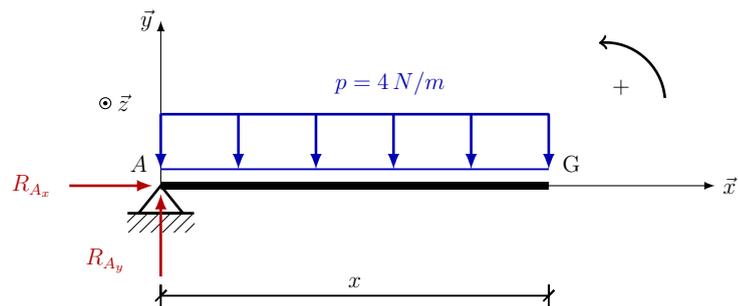
donne

$$R_{B_y} l - pl \frac{l}{2} = 0 \Rightarrow R_{B_y} = \frac{pl}{2}$$

$$R_{A_y} = R_{B_y} = \frac{pl}{2}$$

2- Nous avons 1 seule zone :  $0 < x < l$

Zone 1 :  $0 < x < l$



L'équilibre du tronçon 1 de la poutre donne :

$$\left\{ \mathcal{T}_{coh} \right\}_G = - \left\{ \mathcal{T}_{ext \rightarrow 1} \right\}_G$$

avec

$$\left\{ \mathcal{T}_{coh} \right\}_G = \begin{pmatrix} N & 0 \\ T_y & 0 \\ 0 & M_{f_z} \end{pmatrix}$$

Ce qui donne

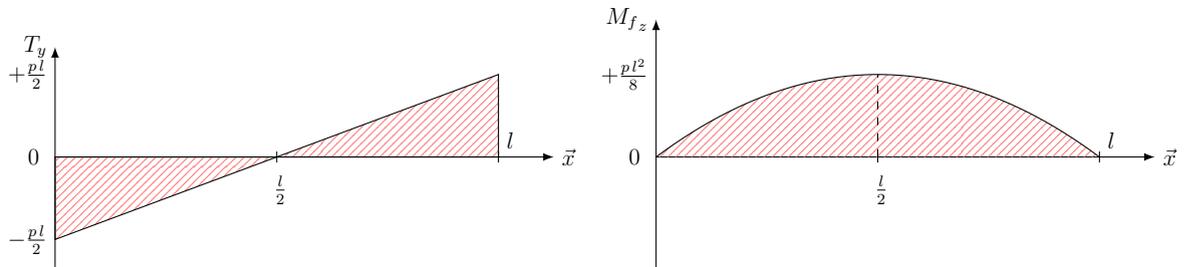
$$N = -R_{A_x} = 0 \quad , \quad T_y = -R_{A_y} + px = -\frac{pl}{2} + px \quad , \quad T_y = p \left( x - \frac{l}{2} \right)$$

$$M_{f_z} = R_{A_y} x - p \frac{x^2}{2} = \frac{pl}{2} x - p \frac{x^2}{2} \quad , \quad M_{f_z} = \frac{p}{2} x (l - x)$$

donc nous avons :

$$\begin{aligned} N &= 0 \\ T_y &= p \left( x - \frac{l}{2} \right) \\ M_{f_z} &= \frac{p}{2} x (l - x) \end{aligned}$$

3- Diagrammes :  $T_y$  et  $M_{f_z}$



4- Expression de  $h_{min}$ .

la condition de résistance est donnée par l'équation suivante :  $\sigma_{max} \leq \sigma_p$  ce qui donne

$$\frac{M_{f_z max}}{I_{(G,z)}} y_{max} \leq \sigma_p$$

$$\frac{pl^2}{8} \frac{h}{12} \leq \sigma_p$$

$$\frac{3pl^2}{4bh^2} \leq \sigma_p$$

ce qui donne

$$\frac{3pl^2}{4b\sigma_p} \leq h^2$$

Finalement, on aura :

$$h \geq \frac{l}{2} \sqrt{\frac{3p}{b\sigma_p}}$$

5- Equation de la déformée  $y(x)$ .

La déformée est donnée par (Effort tranchant négligé) l'équation différentielle suivante :

$$y''(x) = \frac{M_{fz}}{E I_{(G,z)}}$$

$$y''(x) = \frac{M_{fz}}{E I_{(G,z)}} \quad \text{avec} \quad E : \text{Module d'Young (MPa)}$$

Nous avons 1 zone donc 1 seule équation de la flèche.

$$M_{fz} = \frac{p}{2} x (l - x)$$

$$E I_{(G,z)} y''(x) = \frac{p}{2} x (l - x) = \frac{pl}{2} x - \frac{p}{2} x^2$$

Une première intégration donne :

$$E I_{(G,z)} y'(x) = \frac{pl}{4} x^2 - \frac{p}{6} x^3 + C_1$$

Une deuxième intégration donne :

$$E I_{(G,z)} y(x) = \frac{pl}{12} x^3 - \frac{p}{24} x^4 + C_1 x + C_2 \quad (C_1, C_2 : \text{Constantes d'intégration})$$

Détermination des Constantes d'intégration :  $C_1$  et  $C_2$

Nous avons :

$$y(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \quad , \quad y(l) = 0 \Rightarrow C_1 = -\frac{pl^3}{24}$$

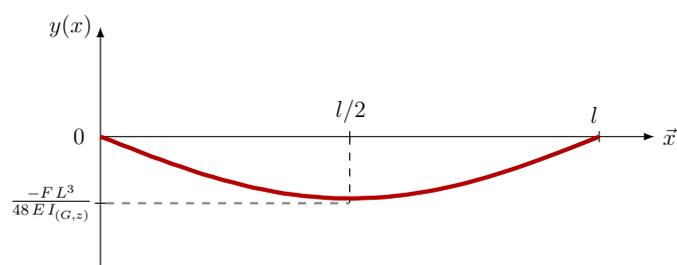
Donc,

$$E I_{(G,z)} y(x) = \frac{pl}{12} x^3 - \frac{p}{24} x^4 - \frac{pl^3}{24} x$$

$$y(x) = \frac{px}{24 E I_{(G,z)}} (-x^3 + 2lx^2 - l^3)$$

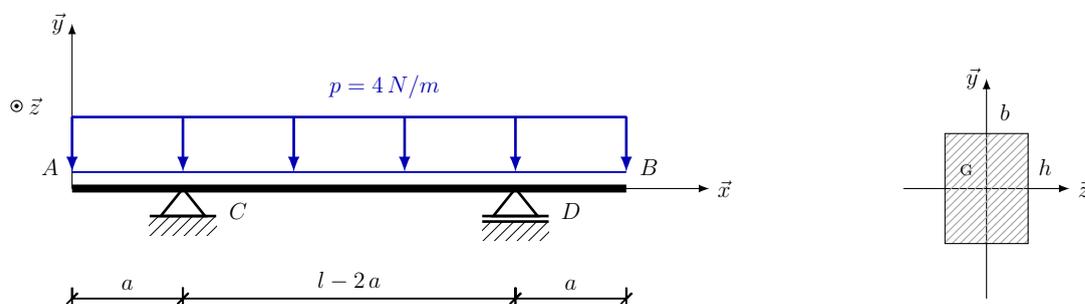
$$y'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{l}{2}$$

$$y_{max} = -\frac{5pl^4}{384 E I_{(G,z)}}$$



**Exercice 1**

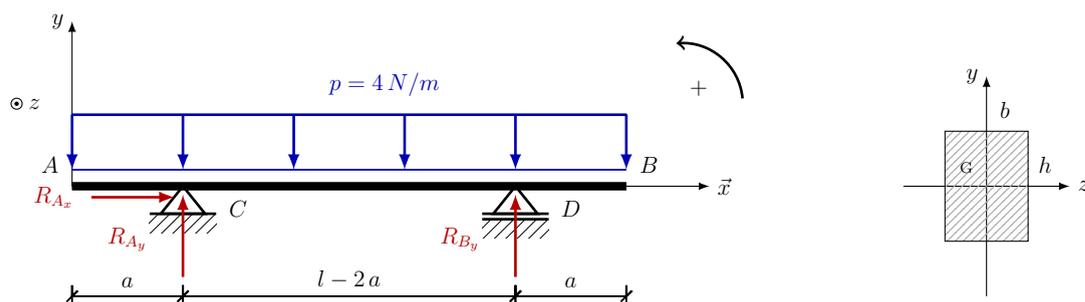
On considère une poutre  $AB$  de section rectangulaire ( $b h$ ) et de longueur  $l$  sur 2 appuis simples. La poutre est soumise à une charge uniformément répartie  $p$  appliquée sur toute la longueur de la poutre. La poutre est en acier dont la limite pratique à la traction  $\sigma_p$  et le module d'élasticité longitudinal est  $E$ .



- 1°) Etablir le bilan des efforts.
- 2°) Déterminer l'expression de l'effort tranchant ainsi que le moment fléchissant.
- 3°) Tracer les diagrammes
- 4°) Etablir l'expression de la hauteur minimale  $b_{min}$  pour une valeur de  $h$  donnée.
- 5°) Etablir l'expression de la déformée (flèche). Endéduire la valeur de flèche maximale.

**SOLUTION**

1- Etablissons le bilan des effort.



Ecrivons les équations d'équilibre

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$$

donne

$$P_{roj/x} \longrightarrow R_{Ax} = 0 ; P_{roj/y} \longrightarrow R_{Ay} + R_{By} - pl = 0$$

et

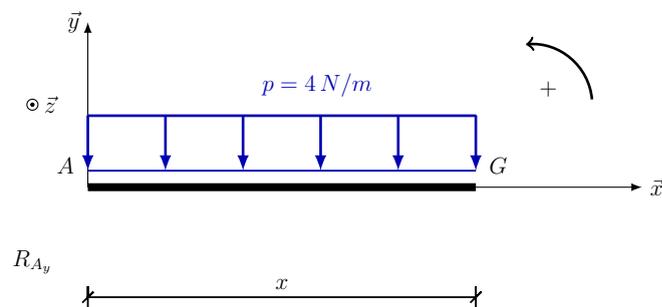
$$\sum \vec{M}_{F_{ext}/A} = \vec{0}$$

$$R_{A_y} a + R_{B_y} (l - a) - p l \frac{l}{2} = 0.$$

$$R_{A_y} = R_{B_y} = \frac{p l}{2} \quad \text{On pouvait avoir ce résultat grâce à la symétrie}$$

2- Nous avons 3 zones :

Zone 1 :  $0 < x < a$



L'équilibre du tronçon 1 de la poutre donne :

$$\left\{ \mathcal{T}_{coh} \right\}_G = - \left\{ \mathcal{T}_{ext \rightarrow 1} \right\}_G$$

avec

$$\left\{ \mathcal{T}_{coh} \right\}_G = \begin{pmatrix} N & 0 \\ T_y & 0 \\ 0 & M_{f_z} \end{pmatrix}$$

Ce qui donne

$$N = -R_{A_x} = 0 \quad , \quad T_y = p x$$

$$M_{f_z} = -p \frac{x^2}{2}$$

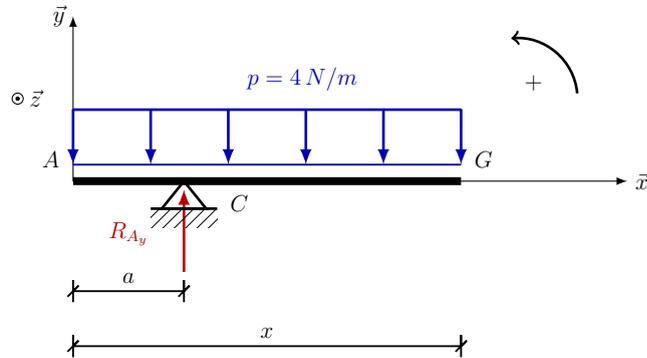
donc nous avons :

$$N = 0$$

$$T_y = p x$$

$$M_{f_z} = -\frac{p x^2}{2}$$

Zone 2 :  $a < x < l - a$



L'équilibre du tronçon 2 de la poutre donne :

$$\left\{ \mathcal{T}_{coh} \right\}_G = - \left\{ \mathcal{T}_{ext \rightarrow 1} \right\}_G$$

avec

$$\left\{ \mathcal{T}_{coh} \right\}_G = \begin{pmatrix} N & 0 \\ T_y & 0 \\ 0 & M_{f_z} \end{pmatrix}$$

Ce qui donne

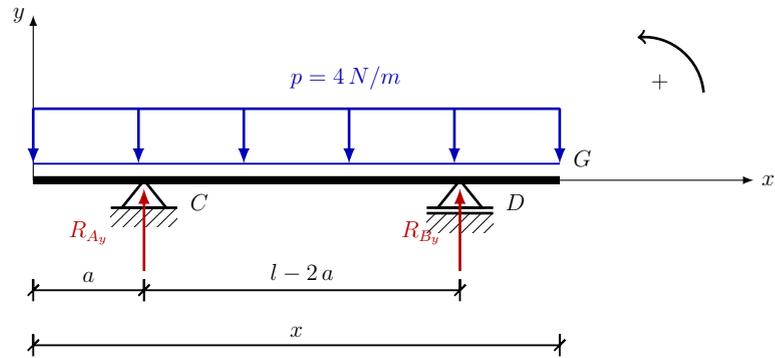
$$N = -R_{Ax} = 0 \quad , \quad T_y = -R_{Ay} + px = -\frac{pl}{2} + px \quad , \quad T_y = p \left( x - \frac{l}{2} \right)$$

$$M_{f_z} = - \left( p \frac{x^2}{2} - R_{Ay} (x - a) \right) = \frac{pl}{2} x - p \frac{la}{2} - p \frac{x^2}{2}$$

donc nous avons :

$$\begin{aligned} N &= 0 \\ T_y &= p \left( x - \frac{l}{2} \right) \\ M_{f_z} &= -\frac{p}{2} \left( x - \frac{l}{2} \right)^2 + \frac{pl}{2} \left( \frac{l}{4} - a \right) \end{aligned}$$

Zone 3 :  $l - a < x < l$



L'équilibre du tronçon 3 de la poutre donne :

$$\left\{ \mathcal{T}_{coh} \right\}_G = - \left\{ \mathcal{T}_{ext \rightarrow 1} \right\}_G$$

avec

$$\left\{ \mathcal{T}_{coh} \right\}_G = \begin{pmatrix} N & 0 \\ T_y & 0 \\ 0 & M_{f_z} \end{pmatrix}$$

Ce qui donne

$$N = -R_{Ax} = 0 \quad , \quad T_y = -R_{Ay} - R_{By} + px = -\frac{pl}{2} - \frac{pl}{2} + px \quad , \quad T_y = p(x - l)$$

$$M_{f_z} = - \left( p \frac{x^2}{2} - R_{Ay}(x - a) - R_{By}(x - (l - a)) \right) = -\frac{p}{2}(x - l)^2$$

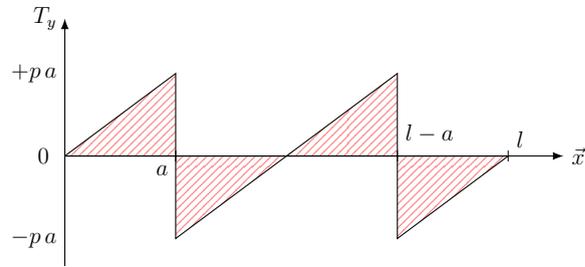
donc nous avons :

$$N = 0$$

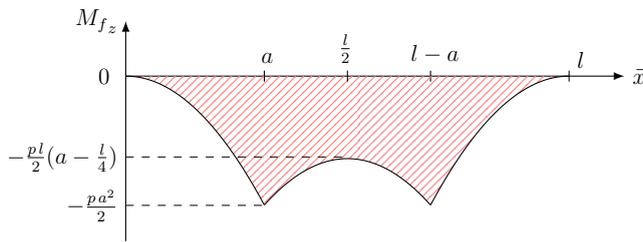
$$T_y = p(x - l)$$

$$M_{f_z} = -\frac{p}{2}(x - l)^2$$

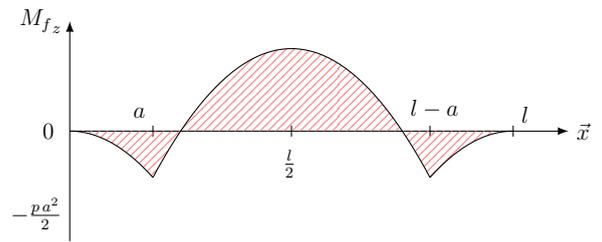
### 3- Diagrammes : $T_y$ et $M_{f_z}$



Cas de :  $a > \frac{l}{4}$  et  $a < \frac{l}{4}$ .

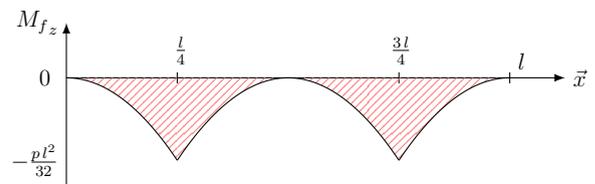
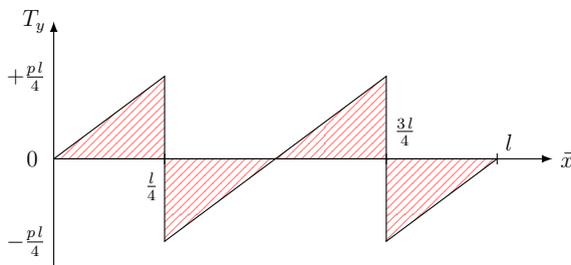


$$a > \frac{l}{4}$$



$$a < \frac{l}{4}$$

Cas de :  $a = \frac{l}{4}$ .



### 4- Expression de $h_{min}$ .

la condition de résistance est donnée par l'équation suivante :  $\sigma_{max} \leq \sigma_p$  ce qui donne

$$\frac{M_{fz_{max}}}{I_{(G,z)}} y_{max} \leq \sigma_p$$

$$\frac{pl^2}{32} \frac{h}{12} \leq \sigma_p$$

$$\frac{3pl^2}{16bh^2} \leq \sigma_p$$

ce qui donne

$$\frac{3pl^2}{4h^2\sigma_p} \leq b$$

Finalement, on aura :

$$b \geq \frac{3pl^2}{4h^2\sigma_p}$$

### 5- Equation de la déformée $y(x)$ .

La déformée est donnée par (Effort tranchant négligé) l'équation différentielle suivante :

$$y''(x) = \frac{M_{fz}}{E I_{(G,z)}}$$

$$y''(x) = \frac{M_{fz}}{E I_{(G,z)}} \quad \text{avec} \quad E : \text{Module d'Young (MPa)}$$

Nous avons 3 zone donc 3 équations de la flèche.

Zone 1 :  $0 < x < \frac{l}{4}$

$$M_{fz} = -p \frac{x^2}{2}$$

$$E I_{(G,z)} y_1''(x) = -p \frac{x^2}{2}$$

Une première integration donne :

$$E I_{(G,z)} y_1'(x) = -p \frac{x^3}{6} + C_1$$

Une deuxième integration donne :

$$E I_{(G,z)} y_1(x) = -p \frac{x^4}{24} + C_1 x + C_2 \quad (C_1, C_2 : \text{Constantes d'integration})$$

Zone 2 :  $\frac{l}{4} < x < \frac{3l}{4}$

$$M_{fz} = -\frac{p}{2} \left( x - \frac{l}{2} \right)^2$$

Une première integration

$$E I_{(G,z)} y_2''(x) = -\frac{p}{2} \left(x - \frac{l}{2}\right)^2$$

Une première integration donne :

$$E I_{(G,z)} y_2'(x) = -\frac{p}{6} \left(x - \frac{l}{2}\right)^3 + C_3$$

Une deuxième integration donne :

$$E I_{(G,z)} y_2(x) = -\frac{p}{24} \left(x - \frac{l}{2}\right)^4 + C_3 x + C_4 \quad (C_3, C_4 : \text{Constantes d'integration})$$

Zone 3 :  $\frac{3l}{4} < x < l$

$$M_{f_z} = -\frac{p}{2} (x - l)^2$$

Une première integration

$$E I_{(G,z)} y_3''(x) = -\frac{p}{2} (x - l)^2$$

Une première integration donne :

$$E I_{(G,z)} y_3'(x) = -\frac{p}{6} (x - l)^3 + C_5$$

Une deuxième integration donne :

$$E I_{(G,z)} y_3(x) = -\frac{p}{24} (x - l)^4 + C_5 x + C_6 \quad (C_5, C_6 : \text{Constantes d'integration})$$

Détermination des Constantes d'integration :  $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5$  et  $C_6$

Nous avons :

$$y_1\left(\frac{l}{4}\right) = 0, \quad y_2\left(\frac{l}{4}\right) = 0, \quad y_2\left(\frac{3l}{4}\right) = 0, \quad y_3\left(\frac{3l}{4}\right) = 0$$

$$y_1'\left(\frac{l}{4}\right) = y_2'\left(\frac{l}{4}\right), \quad y_2'\left(\frac{3l}{4}\right) = y_3'\left(\frac{3l}{4}\right)$$

Après calcul, on trouve

$$C_1 = \frac{p}{3} \left(\frac{l}{4}\right)^3$$

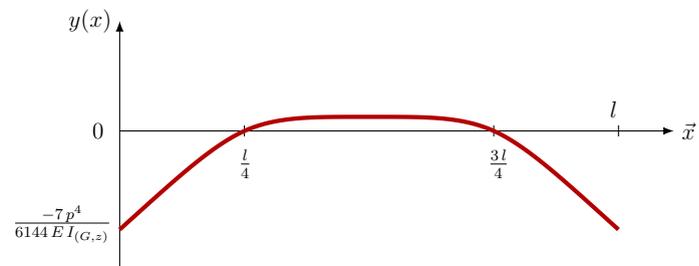
$$C_2 = -\frac{7p}{24} \left(\frac{l}{4}\right)^4$$

$$C_3 = 0$$

$$C_4 = \frac{p}{24} \left(\frac{l}{4}\right)^4$$

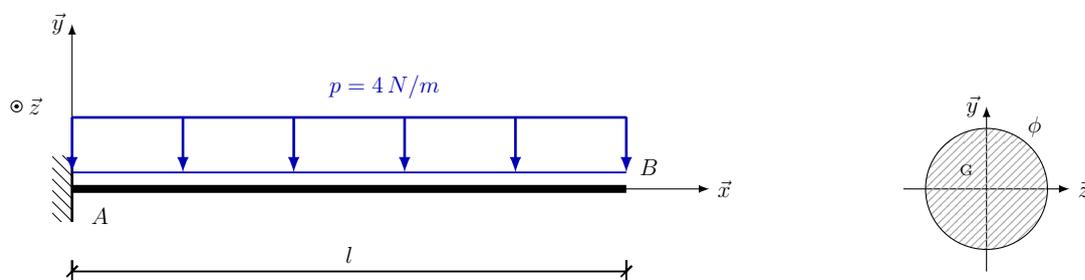
$$C_5 = -\frac{p}{3} \left(\frac{l}{4}\right)^3$$

$$C_6 = \frac{25p}{24} \left(\frac{l}{4}\right)^4$$



## Exercice 1

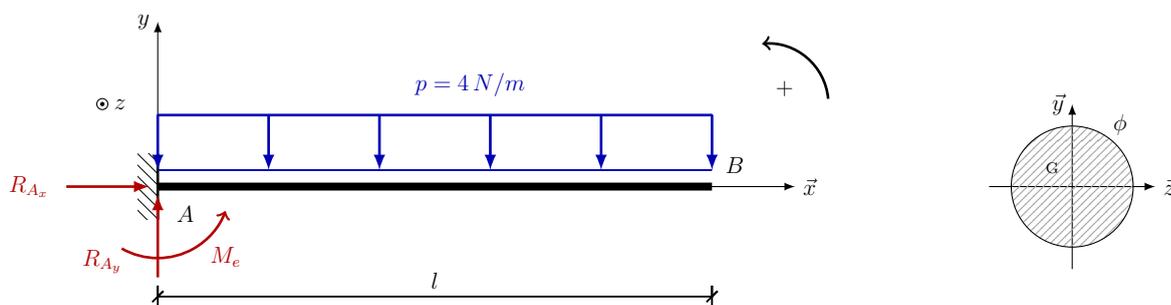
On considère une poutre  $AB$  de section circulaire (diamètre  $\phi$ ) et de longueur  $l$  sur 2 appuis simples. La poutre est soumise à une charge uniformément répartie  $p$  appliquée sur toute la longueur de la poutre. La poutre est en acier dont la limite pratique à la traction  $\sigma_p$  et le module d'élasticité longitudinal est  $E$ .



- 1°) Etablir le bilan des efforts.
- 2°) Déterminer l'expression de l'effort tranchant ainsi que le moment fléchissant.
- 3°) Tracer les diagrammes
- 4°) Etablir l'expression de la hauteur minimale  $h_{min}$  pour une valeur de  $b$  donnée.
- 5°) Etablir l'expression de la déformée (flèche). Endéduire la valeur de flèche maximale.

## SOLUTION

1- Etablissons le bilan des effort.



Ecrivons les équations d'équilibre

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$$

donne

$$P_{roj/x} \longrightarrow R_{Ax} = 0 ; P_{roj/y} \longrightarrow R_{Ay} - pl = 0 \Rightarrow R_{Ay} = pl$$

et

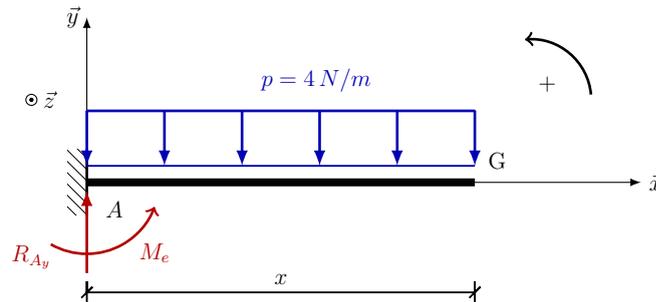
$$\sum \vec{M}_{F_{ext}/A} = \vec{0}$$

donne

$$M_e - pl \frac{l}{2} = 0 \Rightarrow M_e = \frac{pl^2}{2}$$

2- Nous avons 1 seule zone :  $0 < x < l$

Zone 1 :  $0 < x < l$



L'équilibre du tronçon 1 de la poutre donne :

$$\left\{ \mathcal{T}_{coh} \right\}_G = - \left\{ \mathcal{T}_{ext \rightarrow 1} \right\}_G$$

avec

$$\left\{ \mathcal{T}_{coh} \right\}_G = \begin{pmatrix} N & 0 \\ T_y & 0 \\ 0 & M_{f_z} \end{pmatrix}$$

Ce qui donne

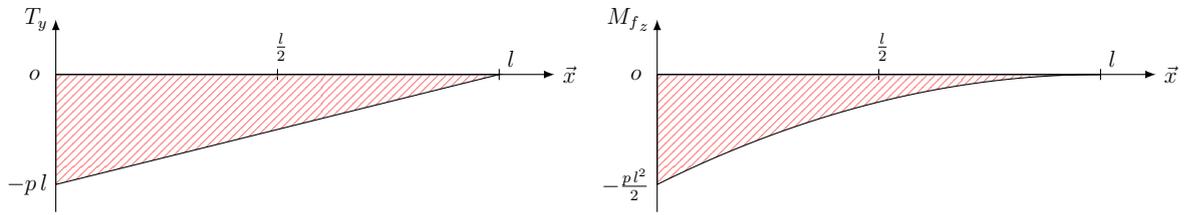
$$N = -R_{Ax} = 0 \quad , \quad T_y = -R_{Ay} + px = -pl + px \quad , \quad T_y = p(x - l)$$

$$M_{f_z} = R_{Ay} x - p \frac{x^2}{2} - M_e = plx - p \frac{x^2}{2} - \frac{pl^2}{2} \quad , \quad M_{f_z} = -\frac{p}{2}(x^2 - 2lx + l^2)$$

donc nous avons :

$$\begin{aligned} N &= 0 \\ T_y &= p(x - l) \\ M_{f_z} &= -\frac{p}{2}(x - l)^2 \end{aligned}$$

3- Diagrammes :  $T_y$  et  $M_{f_z}$



4- Expression de  $h_{min}$ .

la condition de résistance est donnée par l'équation suivante :  $\sigma_{max} \leq \sigma_p$  ce qui donne

$$\frac{M_{f_z max}}{I_{(G,z)}} y_{max} \leq \sigma_p$$

$$\frac{pl^2}{2} \frac{\phi}{\pi \phi^4} \frac{\phi}{2} \leq \sigma_p$$

$$\frac{16pl^2}{\pi \phi^3} \leq \sigma_p$$

ce qui donne

$$\frac{16pl^2}{\pi \sigma_p} \leq \phi^3$$

Finalement, on aura :

$$R = \frac{\phi}{2} \geq \sqrt[3]{\frac{2pl^2}{\pi \sigma_p}}$$

5- Equation de la déformée  $y(x)$ .

La déformée est donnée par (Effort tranchant négligé) l'équation différentielle suivante :

$$y''(x) = \frac{M_{fz}}{E I_{(G,z)}}$$

$$y''(x) = \frac{M_{fz}}{E I_{(G,z)}} \quad \text{avec} \quad E : \text{Module d'Young (MPa)}$$

Nous avons 1 zone donc 1 seule équation de la flèche.

$$M_{fz} = -\frac{p}{2}(x-l)^2$$

$$E I_{(G,z)} y''(x) = -\frac{p}{2}(x-l)^2$$

Une première intégration donne :

$$E I_{(G,z)} y'(x) = -\frac{p}{6}(x-l)^3 + C_1$$

Une deuxième intégration donne :

$$E I_{(G,z)} y(x) = -\frac{p}{24}(x-l)^4 + C_1 x + C_2 \quad (C_1, C_2 : \text{Constantes d'intégration})$$

Détermination des Constantes d'intégration :  $C_1$  et  $C_2$

Nous avons :

$$y(0) = 0 \Rightarrow C_2 = +\frac{pl^4}{24}, \quad y'(0) = 0 \Rightarrow C_1 = -\frac{pl^3}{6}$$

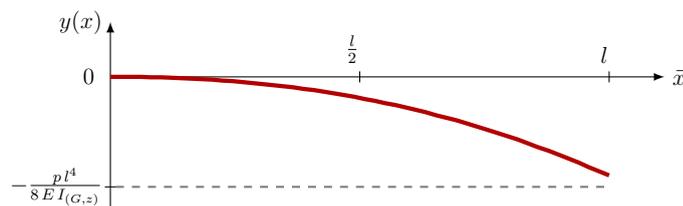
Donc,

$$E I_{(G,z)} y(x) = -\frac{p}{24}(x-l)^4 - \frac{pl^3}{6}x + \frac{pl^4}{24}$$

$$y(x) = -\frac{p}{24 E I_{(G,z)}} ((x-l)^4 + 4l^3 x - l^4)$$

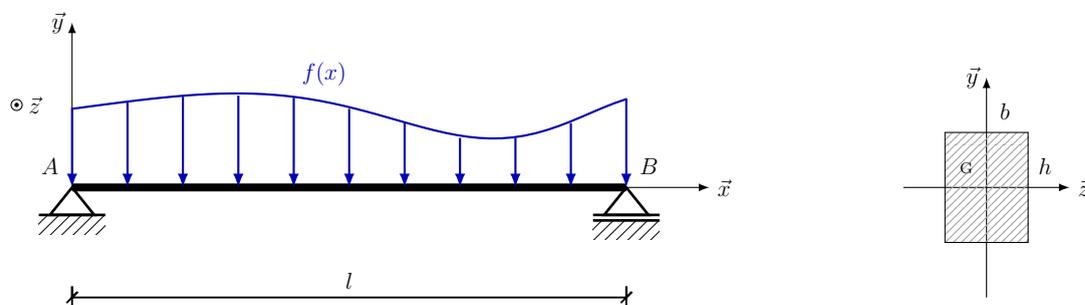
$$y_{max} = y(x) \Big|_{x=l}$$

$$y_{max} = -\frac{pl^4}{8 E I_{(G,z)}}$$



## Exercice 1

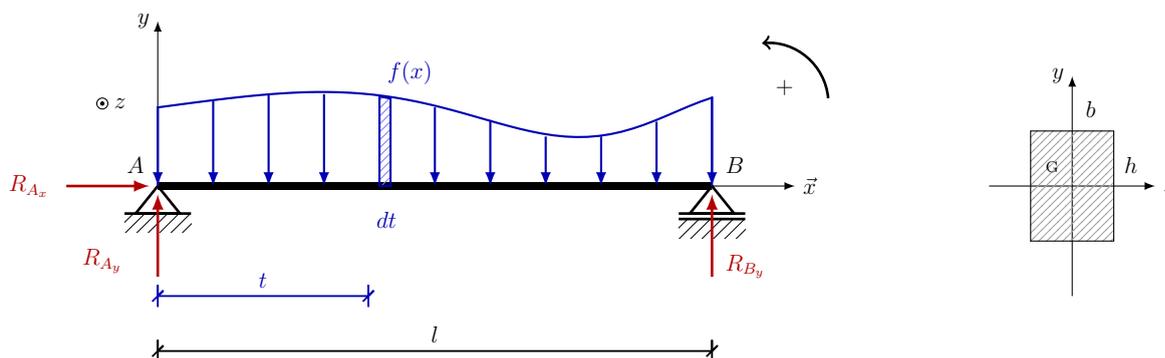
On considère une poutre  $AB$  de section rectangulaire ( $bh$ ) et de longueur  $l$  sur 2 appuis simples. La poutre est soumise à une charge non uniformément répartie  $f(x)$  appliquée sur toute la longueur de la poutre. La poutre est en acier dont la limite pratique à la traction  $\sigma_p$  et le module d'élasticité longitudinal est  $E$ .



- 1°) Etablir le bilan des efforts.
- 2°) Déterminer l'expression de l'effort tranchant ainsi que le moment fléchissant.
- 3°) Tracer les diagrammes
- 4°) Etablir l'expression de la hauteur minimale  $h_{min}$  pour une valeur de  $b$  donnée.
- 5°) Etablir l'expression de la déformée (flèche). Endéduire la valeur de flèche maximale.

## SOLUTION

1- Etablissons le bilan des effort.



Ecrivons les équations d'équilibre

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$$

donne

$$P_{roj/x} \longrightarrow R_{Ax} = 0 ; \quad P_{roj/y} \longrightarrow R_{Ay} + R_{By} - \int_0^l f(x) dx = 0$$

et

$$\sum \vec{M}_{F_{ext}/A} = \vec{0}$$

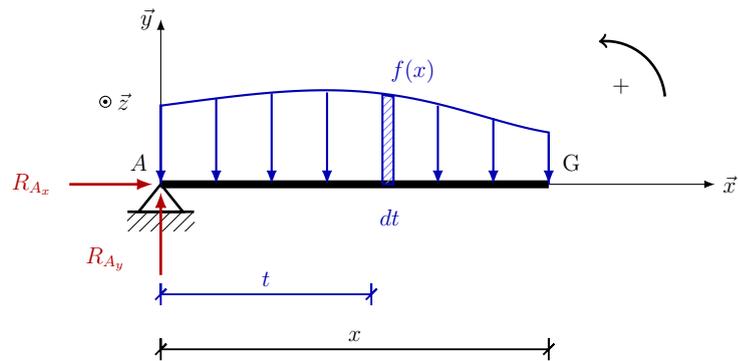
donne

$$R_{B_y} l - \int_0^l t f(t) dt = 0 \Rightarrow R_{B_y} = \frac{1}{l} \int_0^l t f(t) dt$$

$$R_{A_y} = \int_0^l f(x) dx - \frac{1}{l} \int_0^l t f(t) dt$$

2- Nous avons 1 seule zone :  $0 < x < l$

Zone 1 :  $0 < x < l$



L'équilibre du tronçon 1 de la poutre donne :

$$\left\{ \mathcal{T}_{coh} \right\}_G = - \left\{ \mathcal{T}_{ext \rightarrow 1} \right\}_G$$

avec

$$\left\{ \mathcal{T}_{coh} \right\}_G = \begin{pmatrix} N & 0 \\ T_y & 0 \\ 0 & M_{f_z} \end{pmatrix}$$

Ce qui donne

$$N = -R_{A_x} = 0 \quad , \quad T_y = -R_{A_y} + \int_0^x f(t) dt = - \int_0^l f(x) dx + \frac{1}{l} \int_0^l t f(t) dt + \int_0^x f(t) dt$$

$$T_y = - \int_x^l f(t) dt + \frac{1}{l} \int_0^l t f(t) dt$$

$$M_{f_z} = R_{A_y} x - \int_0^x (x-t) f(t) dt = x \left( \int_0^l f(x) dx - \frac{1}{l} \int_0^l t f(t) dt \right) - \int_0^x (x-t) f(t) dt$$

$$M_{f_z} = x \int_x^l f(t) dt - \frac{x}{l} \int_x^l t f(t) dt + \frac{l-x}{l} \int_0^x t f(t) dt$$

donc nous avons :

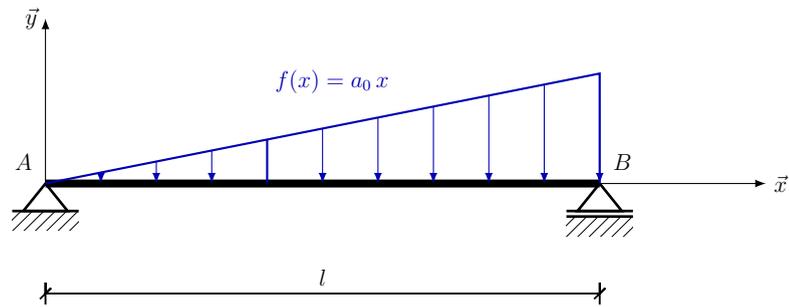
$$N = 0$$

$$T_y = - \int_0^l f(x) dx + \frac{1}{l} \int_0^l t f(t) dt + \int_0^x f(t) dt$$

$$M_{f_z} = x \int_x^l f(t) dt - \frac{x}{l} \int_x^l t f(t) dt + \frac{l-x}{l} \int_0^x t f(t) dt$$

### 3- Diagrammes : $T_y$ et $M_{f_z}$

Pour résoudre ce problème, nous allons prendre comme exemple la fonction  $f(x) = a_0 x$  :



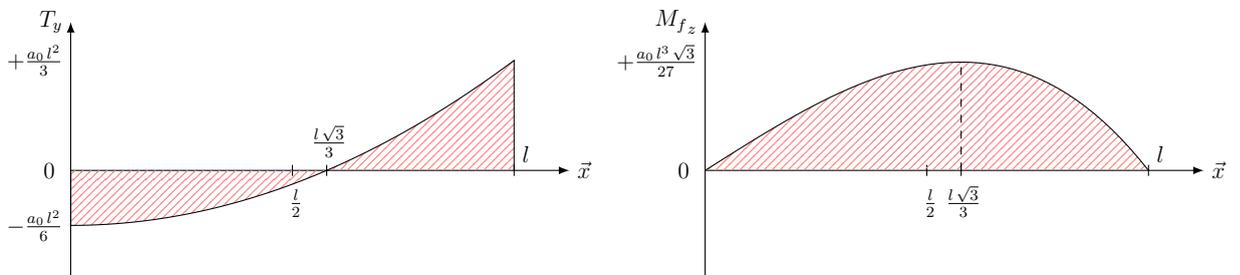
Dans ce cas, nous aurons :

$$R_{A_y} = a_0 \frac{l^2}{6}$$

$$R_{B_y} = a_0 \frac{l^2}{3}$$

$$T_y = \frac{a_0}{6} (3x^2 - l^2)$$

$$M_{f_z} = \frac{a_0 x}{6} (l^2 - x^2)$$



4- Expression de  $h_{min}$ .

la condition de résistance est donnée par l'équation suivante :  $\sigma_{max} \leq \sigma_p$  ce qui donne

$$\frac{M_{fz_{max}}}{I_{(G,z)}} y_{max} \leq \sigma_p$$

$$\frac{a_0 l^3 \sqrt{3} h}{27 \frac{b h^3}{12}} \leq \sigma_p$$

$$\frac{2 a_0 l^3 \sqrt{3}}{9 b h^2} \leq \sigma_p$$

ce qui donne

$$\frac{2 a_0 l^3 \sqrt{3}}{9 b \sigma_p} \leq h^2$$

Finalement, on aura :

$$h \geq \frac{l}{3} \sqrt{2 \sqrt{3} a_0 l b \sigma_p}$$

5- Equation de la déformée  $y(x)$ .

La déformée est donnée par (Effort tranchant négligé) l'équation différentielle suivante :

$$y''(x) = \frac{M_{fz}}{E I_{(G,z)}}$$

$$y''(x) = \frac{M_{fz}}{E I_{(G,z)}} \quad \text{avec} \quad E : \text{Module d'Young (MPa)}$$

Nous avons 1 zone donc 1 seule équation de la flèche.

$$M_{fz} = \frac{p}{2} x (l - x)$$

$$E I_{(G,z)} y''(x) = \frac{p}{2} x (l - x) = \frac{pl}{2} x - \frac{p}{2} x^2$$

Une première intégration donne :

$$E I_{(G,z)} y'(x) = \frac{pl}{4} x^2 - \frac{p}{6} x^3 + C_1$$

Une deuxième intégration donne :

$$E I_{(G,z)} y(x) = \frac{pl}{12} x^3 - \frac{p}{24} x^4 + C_1 x + C_2 \quad (C_1, C_2 : \text{Constantes d'intégration})$$

Détermination des Constantes d'intégration :  $C_1$  et  $C_2$

Nous avons :

$$y(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \quad , \quad y(l) = 0 \Rightarrow C_1 = -\frac{pl^3}{24}$$

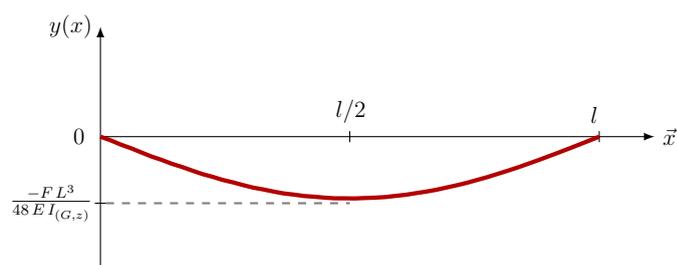
Donc,

$$E I_{(G,z)} y(x) = \frac{pl}{12} x^3 - \frac{p}{24} x^4 - \frac{pl^3}{24} x$$

$$y(x) = \frac{px}{24 E I_{(G,z)}} (-x^3 + 2lx^2 - l^3)$$

$$y'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{l}{2}$$

$$y_{max} = -\frac{5pl^4}{384 E I_{(G,z)}}$$

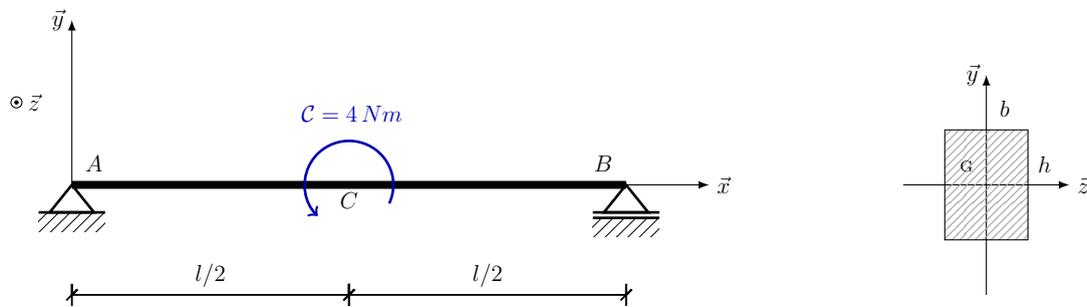


## TD RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX

Pr. R. Kouddane

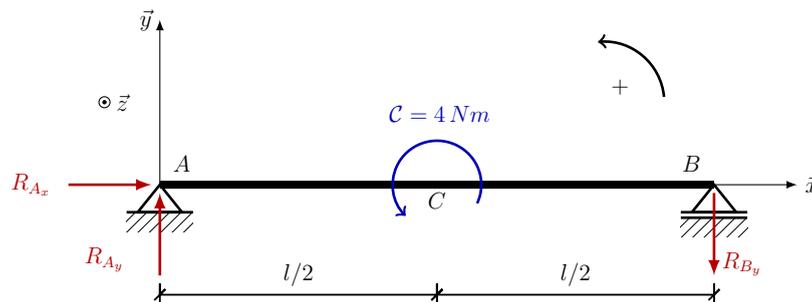
## Exercice 1

On considère une poutre  $AB$  de section constante et de longueur  $l$  sur 2 appuis simples. La poutre est soumise à un couple  $C$  appliqué en son milieu.  $E$  étant le module d'Young.



1°) En utilisant le théorème de Castigliano, exprimer la rotation du point  $C$ .

## SOLUTION



Comme nous l'avons établi dans un précédent TD, les moments fléchissants des 2 zones sont donnés par :

Zone 1 :  $0 < x < \frac{l}{2}$

$$M_{f_{z_1}} = \frac{C}{l} x$$

Zone 2 :  $\frac{l}{2} < x < l$

$$M_{f_{z_2}} = C \left( \frac{x}{l} - 1 \right)$$

En appliquant le théorème de Castigliano nous pouvons déterminer la rotation du point C est nul. On aura :

$$\theta_C = \frac{\partial W_e}{\partial C} = \frac{dW_e}{dC}$$

Puisque le problème est à énergie de déformation à flexion dominante on a :

$$W_e = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \frac{M_{fz}^2}{EI_{Gz}} ds = \frac{1}{2} \left[ \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{M_{fz_1}^2}{EI_{Gz}} dx + \int_{\frac{l}{2}}^l \frac{M_{fz_2}^2}{EI_{Gz}} dx \right]$$

$EI_{Gz}$  étant une constante, on aura

$$\begin{aligned} W_e &= \frac{1}{2EI_{Gz}} \left[ \int_0^{\frac{l}{2}} \left( \frac{C}{l} x \right)^2 dx + \int_{\frac{l}{2}}^l C^2 \left( \frac{x}{l} - 1 \right)^2 dx \right] \\ &= \frac{1}{2EI_{Gz}} \left( \frac{C^2}{l^2} \right) \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^{\frac{l}{2}} + \frac{1}{2EI_{Gz}} \left( \frac{C^2}{l^2} \right) \left[ \frac{(x-l)^3}{3} \right]_{\frac{l}{2}}^l \\ &= \frac{1}{2EI_{Gz}} \left( \frac{C^2}{l^2} \right) \left[ \frac{l^3}{24} \right] + \frac{1}{2EI_{Gz}} \left( \frac{C^2}{l^2} \right) \left[ \frac{l^3}{24} \right] \end{aligned}$$

$$W_e = \frac{C^2 l}{24 EI_{Gz}}$$

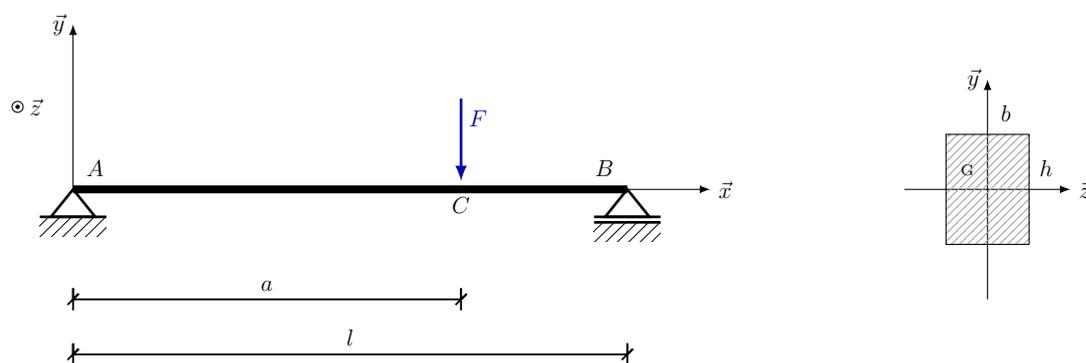
or nous avons :

$$\theta_C = \frac{\partial W_e}{\partial C} = \frac{dW_e}{dC}$$

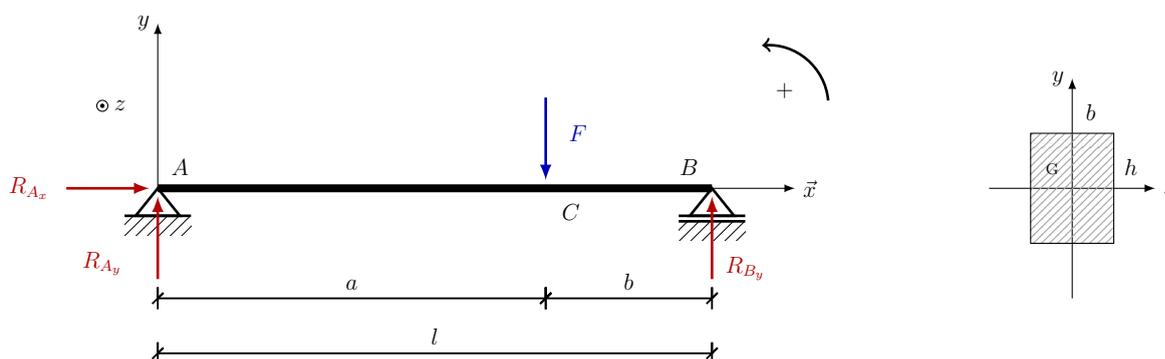
$$\theta_C = \frac{Cl}{12 EI_{Gz}}$$

**Exercice 1**

On considère une poutre  $AB$  de section rectangulaire constante ( $b h$ ) et de longueur  $l$  sur 2 appuis simples. La poutre est soumise à une charge  $F$  appliquée à une distance  $a$  de son extrémité. La poutre est en acier dont la limite pratique à la traction  $\sigma_p$  et le module d'élasticité longitudinal est  $E$ .



1°) En utilisant le théorème de Castigliano, exprimer la rotation du point  $C$ . On considère que la déformation est à flexion dominante.

**SOLUTION**

Comme nous l'avons établi dans un précédent TD, les moments fléchissants des 2 zones sont donnés par :

Zone 1 :  $0 < x < a$

$$M_{f_{z_1}} = \frac{F b}{l} x$$

Zone 2 :  $a < x < l$

$$M_{f_{z_2}} = \frac{F a}{l} (l - x)$$

En appliquant le théorème de Castigliano nous pouvons déterminer la rotation du point C est nul. On aura :

$$\delta_{C_v} = \frac{\partial W_e}{\partial F} = \frac{dW_e}{dF}$$

Puisque le problème est à énergie de déformation à flexion dominante on a :

$$W_e = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \frac{M_{f_z}^2}{EI_{Gz}} ds = \frac{1}{2} \left[ \int_0^a \frac{M_{f_{z_1}}^2}{EI_{Gz}} dx + \int_a^l \frac{M_{f_{z_2}}^2}{EI_{Gz}} dx \right]$$

$EI_{Gz}$  étant une constante, on aura

$$\begin{aligned} W_e &= \frac{1}{2 EI_{Gz}} \left[ \int_0^a \left( \frac{F b}{l} x \right)^2 dx + \int_a^l \left( \frac{F a}{l} \right)^2 (x - l)^2 dx \right] \\ &= \frac{1}{2 EI_{Gz}} \left( \frac{F b}{l} \right)^2 \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^a + \frac{1}{2 EI_{Gz}} \left( \frac{F a}{l} \right)^2 \left[ \frac{(x - l)^3}{3} \right]_a^l \\ &= \frac{1}{2 EI_{Gz}} \left( \frac{F b}{l} \right)^2 \left[ \frac{a^3}{3} \right] - \frac{1}{2 EI_{Gz}} \left( \frac{F a}{l} \right)^2 \left[ \frac{(a - l)^3}{3} \right] \\ W_e &= \frac{F^2 a^2 (l - a)^2}{6 l EI_{Gz}} \end{aligned}$$

or nous avons :

$$\delta_{C_v} = \frac{\partial W_e}{\partial F} = \frac{dW_e}{dF}$$

$$\delta_{C_v} = \frac{F a^2 (l - a)^2}{3 l EI_{Gz}}$$

Cas où :  $a = b = \frac{l}{2}$

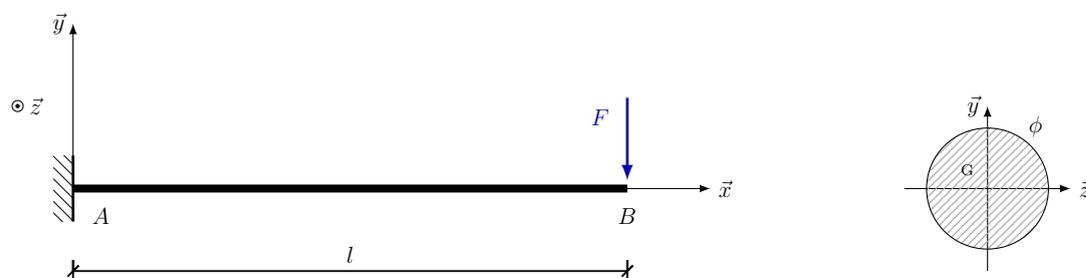
$$\delta_{C_v} = \frac{F l^3}{48 EI_{Gz}}$$

## TD RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX

Pr. R. Kouddane

## Exercice 1

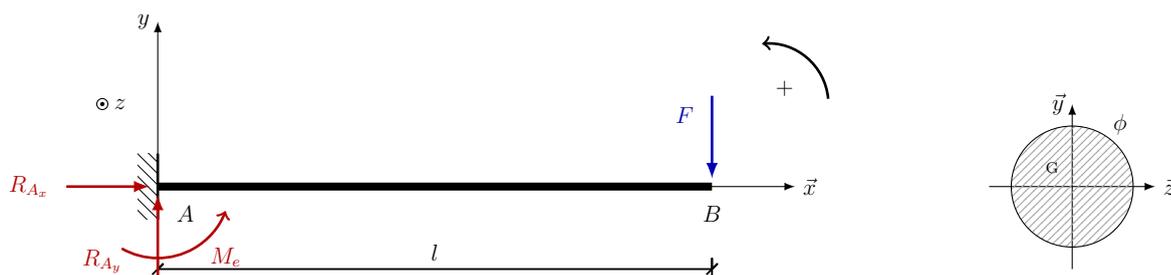
On considère une poutre  $AB$  de section circulaire (diamètre  $\phi$ ) et de longueur  $l$  encastée à une extrémité et libre sur l'autre. La poutre est soumise à une charge concentrée  $F$  appliquée à son extrémité libre. La poutre est en acier dont la limite pratique à la traction  $\sigma_p$  et le module d'élasticité longitudinal est  $E$ .



- 1°) Etablir le bilan des efforts.
- 2°) Déterminer l'expression de l'effort tranchant ainsi que le moment fléchissant.
- 3°) Tracer les diagrammes
- 4°) Etablir l'expression de la hauteur minimale  $h_{min}$  pour une valeur de  $b$  donnée.
- 5°) Etablir l'expression de la déformée (flèche). En déduire la valeur de flèche maximale.

## SOLUTION

1- Nous avons d'après un précédent TD que .



$$M_{f_z} = F(x - l)$$

En appliquant le théorème de Castigliano nous pouvons déterminer la rotation du point C est nul.  
On aura :

$$\delta_{B_v} = \frac{\partial W_e}{\partial F} = \frac{dW_e}{dF}$$

Puisque le problème est à énergie de déformation à flexion dominante on a :

$$W_e = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \frac{M_{fz}^2}{EI_{Gz}} ds = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M_{fz_1}^2}{EI_{Gz}} dx$$

$EI_{Gz}$  étant une constante, on aura

$$\begin{aligned} W_e &= \frac{1}{2 EI_{Gz}} \int_0^l (F(x-l))^2 dx \\ &= \frac{F^2}{2 EI_{Gz}} \left[ \frac{(x-l)^3}{3} \right]_0^l \end{aligned}$$

$$W_e = \frac{F^2 l^3}{6 EI_{Gz}}$$

or nous avons :

$$\delta_{B_v} = \frac{\partial W_e}{\partial F} = \frac{dW_e}{dF}$$

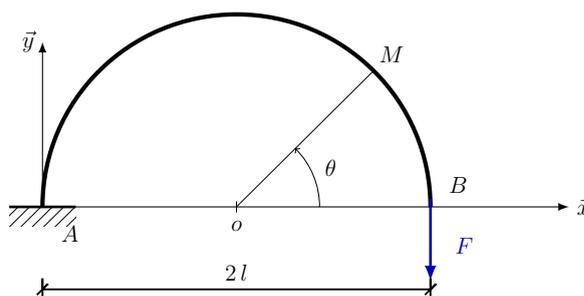
$$\delta_{B_v} = \frac{F l^3}{3 EI_{Gz}}$$

## TD RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX

Pr. R. Kouddane

**Exercice 1**

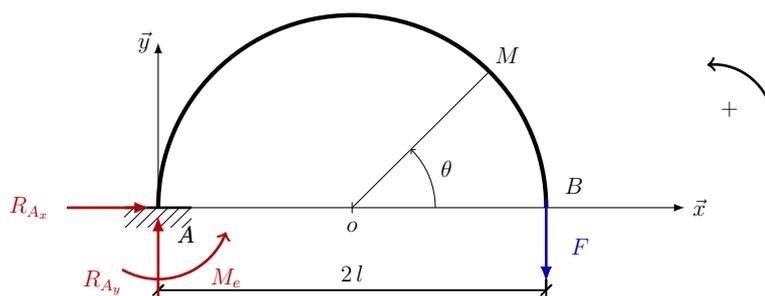
On considère une poutre  $AB$  sous la forme d'un arc, encastree à une extrémité et libre sur l'autre. La poutre est soumise à une charge verticale  $F$  appliquée à son extrémité libre. La poutre est en acier dont la limite pratique à la traction  $\sigma_p$  et le module d'élasticité longitudinal est  $E$ . La poutre a une section circulaire (diamètre  $d$ ). Le problème est à flexion dominante.



- 1°) Etablir le bilan des efforts.
- 2°) Déterminer l'expression du déplacement vertical  $\delta_{B_v}$  du point  $B$ .
- 2°) Déterminer l'expression du déplacement horizontal  $\delta_{B_h}$  du point  $B$ .

## SOLUTION

1- Etablissons le bilan des effort.



Ecrivons les équations d'équilibre

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$$

donne

$$P_{roj/x} \longrightarrow R_{Ax} = 0 ; P_{roj/y} \longrightarrow R_{Ay} - F = 0 \Rightarrow R_{Ay} = F$$

et

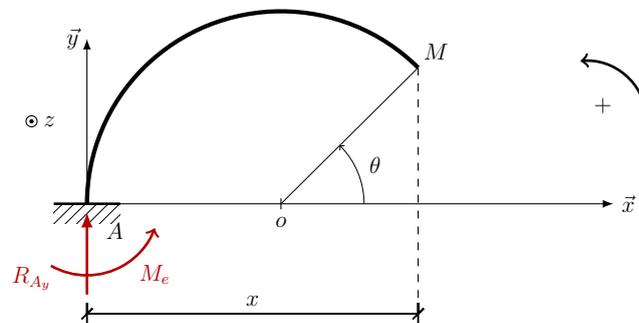
$$\sum \vec{M}_{F_{ext}/A} = \vec{0}$$

donne

$$M_e - 2lF = 0 \quad \Rightarrow \quad M_e = 2lF$$

2- Nous avons 1 seule zone :  $0 < x < l$

Zone 1 :  $0 < x < l$



L'équilibre du tronçon 1 de la poutre donne :

$$\left\{ \mathcal{T}_{coh} \right\}_G = - \left\{ \mathcal{T}_{ext \rightarrow 1} \right\}_G$$

avec

$$\left\{ \mathcal{T}_{coh} \right\}_G = \begin{pmatrix} N & 0 \\ T_y & 0 \\ 0 & M_{f_z} \end{pmatrix}$$

Ce qui donne

$$N = -R_{Ax} = 0 \quad , \quad T_y = -R_{Ay} = -F$$

$$M_{f_z} = R_{Ay} x - M_e = Fl(1 + \cos \theta) - 2Fl \quad , \quad M_{f_z} = Fl(-1 + \cos \theta)$$

donc nous avons :

$$N = 0$$

$$T_y = -F$$

$$M_{f_z} = Fl(-1 + \cos \theta)$$

### 3- Determination de $\delta_{B_v}$ :

D'après Castigliano, on sait que :  $\delta_{B_v} = \frac{\partial W_e}{\partial F}$  avec

$$W_e = \frac{1}{2 E I_{(G,z)}} \int_{\Gamma} (M_{fz})^2 ds$$

$$W_e = \frac{1}{2 E I_{(G,z)}} \int_0^{\pi} \pi F^2 l^2 (-1 + \cos \theta)^2 l d\theta \quad \text{avec} \quad ds = l d\theta$$

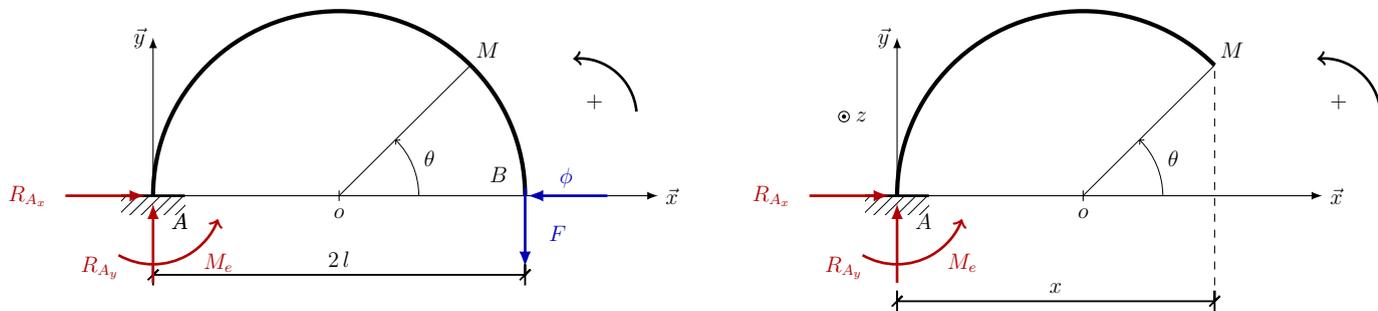
d'où

$$W_e = \frac{F^2 l^3}{2 E I_{(G,z)}} \int_0^{\pi} (-1 + \cos \theta)^2 d\theta$$

Ce qui donne enfin,

$$\delta_{B_v} = \frac{F l^3}{E I_{(G,z)}} \int_0^{\pi} (-1 + \cos \theta)^2 d\theta$$

$$\delta_{B_v} = \frac{3 \pi F l^3}{2 E I_{(G,z)}}$$



Ecrivons les équations d'équilibre

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$$

donne

$$P_{roj/x} \longrightarrow R_{Ax} = \phi ; \quad P_{roj/y} \longrightarrow R_{Ay} - F = 0 \quad \Rightarrow \quad R_{Ay} = F$$

et

$$\sum \vec{M}_{F_{ext}/A} = \vec{0}$$

donne

$$M_e - 2l F = 0 \quad \Rightarrow \quad M_e = 2l F$$

2- Nous avons 1 seule zone :  $0 < x < l$

Zone 1 :  $0 < x < l$

L'équilibre du tronçon 1 de la poutre donne :

$$\left\{ \mathcal{T}_{coh} \right\}_G = - \left\{ \mathcal{T}_{ext \rightarrow 1} \right\}_G$$

avec

$$\left\{ \mathcal{T}_{coh} \right\}_G = \begin{pmatrix} N & 0 \\ T_y & 0 \\ 0 & M_{f_z} \end{pmatrix}$$

Ce qui donne

$$N = -R_{Ax} = -\phi \quad , \quad T_y = -R_{Ay} = -F$$

$$M_{f_z} = R_{Ay} x - M_e - R_{Ax} l \sin \theta = Fl(1 + \cos \theta) - 2Fl - \phi l \sin \theta$$

donc nous avons :

$$N = 0$$

$$T_y = -F$$

$$M_{f_z} = Fl(-1 + \cos \theta) - \phi l \sin \theta$$

3- Determination de  $\delta_{B_h}$  :

D'après Castigliano, on sait que :  $\delta_{B_h} = \frac{\partial W_e}{\partial \phi} \Big|_{\phi=0}$  avec

$$W_e = \frac{1}{2 E I_{(G,z)}} \int_{\Gamma} (M_{f_z})^2 ds$$

$$W_e = \frac{1}{2 E I_{(G,z)}} \int_0^{\pi} (Fl(-1 + \cos \theta) - \phi l \sin \theta)^2 l d\theta \quad \text{avec} \quad ds = l d\theta$$

Puisqu'à la fin, on va dériver par rapport à  $\phi$  avec  $\phi = 0$

$$W_e = \frac{\phi F l^3}{E I_{(G,z)}} \int_0^{\pi} (1 - \cos \theta) \sin \theta d\theta$$

Ce qui donne enfin,

$$\delta_{B_h} = \frac{F l^3}{E I_{(G,z)}} \int_0^{\pi} (\sin \theta - \cos \theta \sin \theta) d\theta$$

$$\delta_{B_h} = \frac{2 F l^3}{E I_{(G,z)}}$$